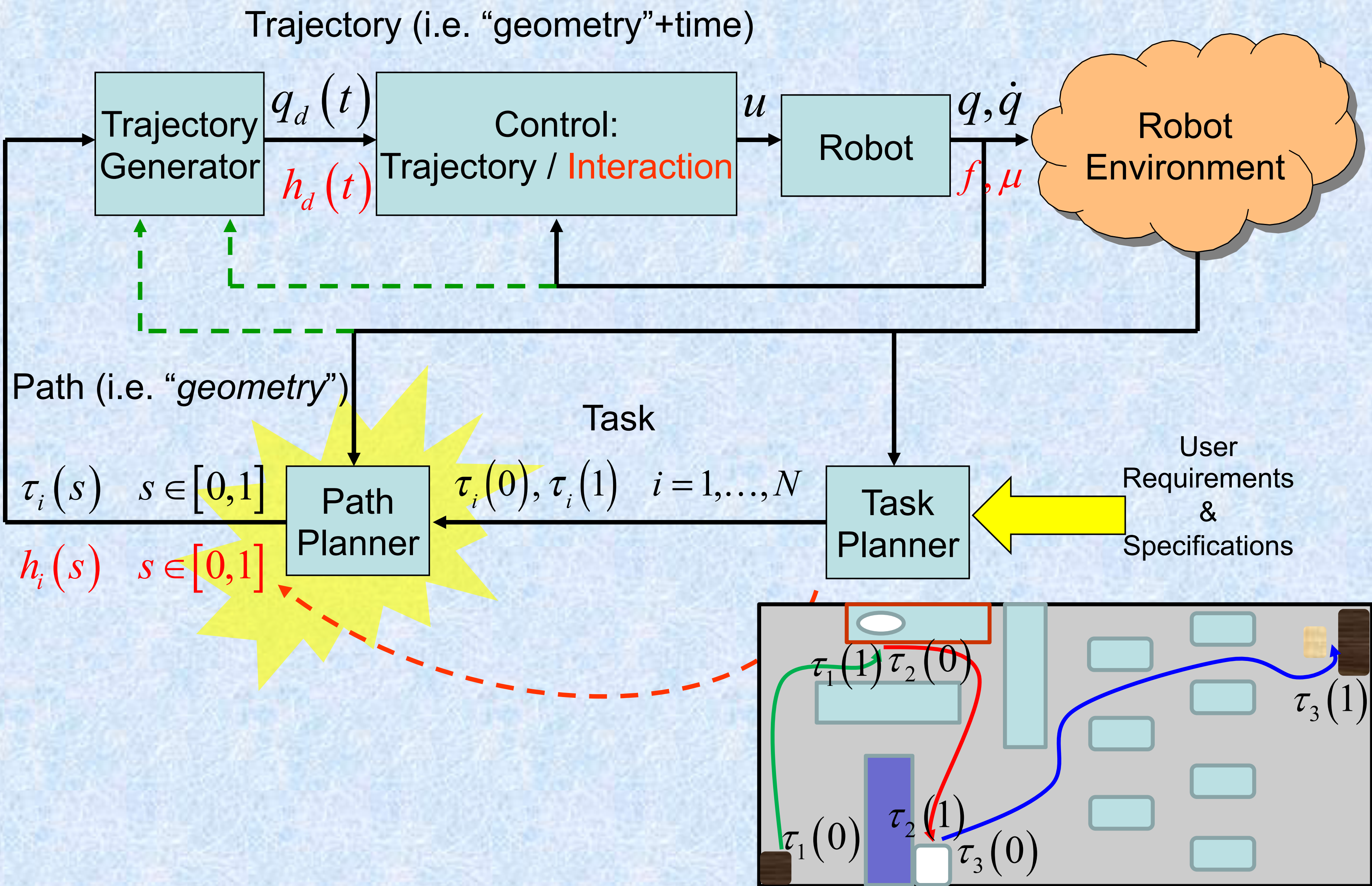
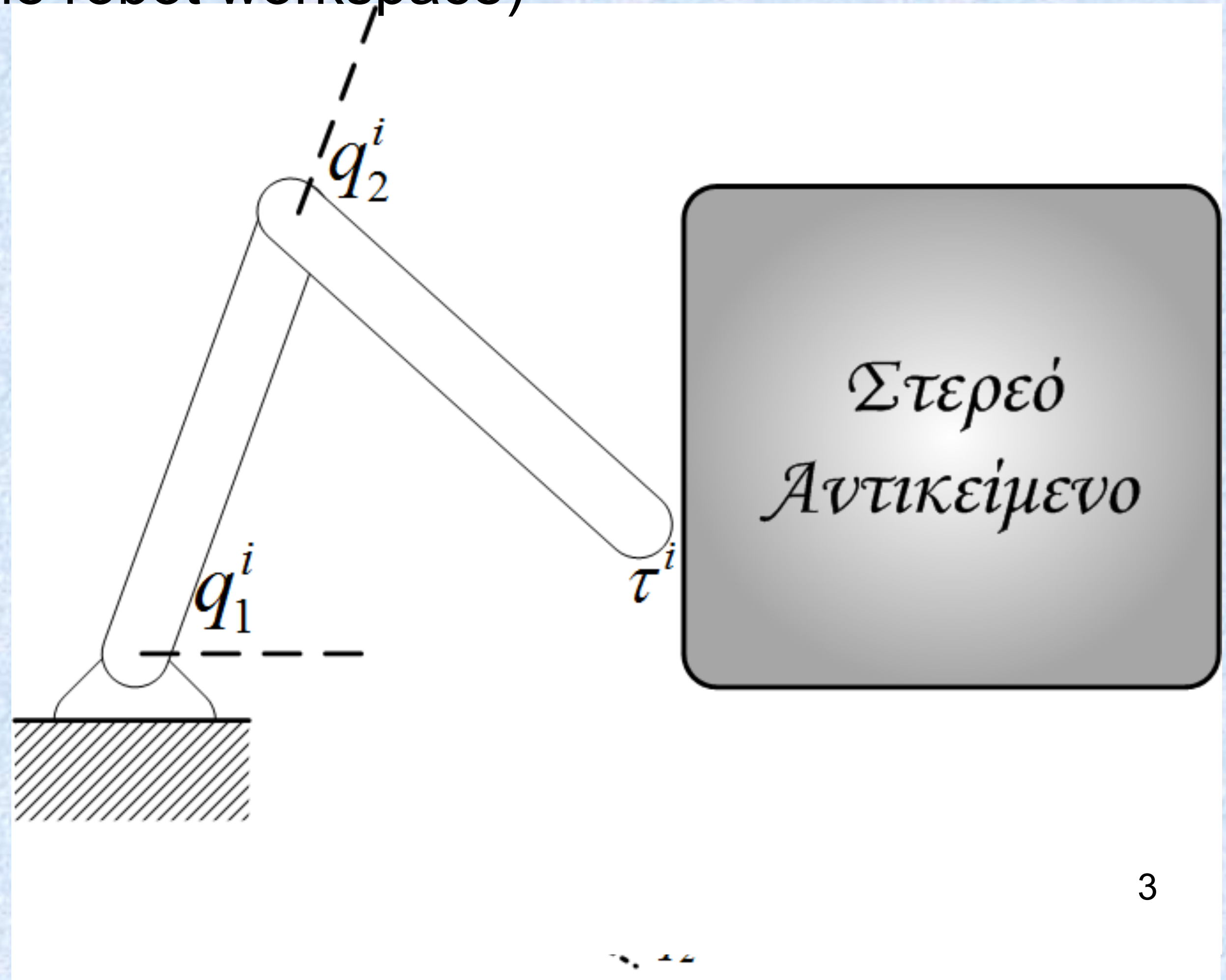
Introduction to Robotic Motion Planning

Robot Planning & Control Architecture



Το Πρόβλημα του Προγραμματισμού της Κίνησης

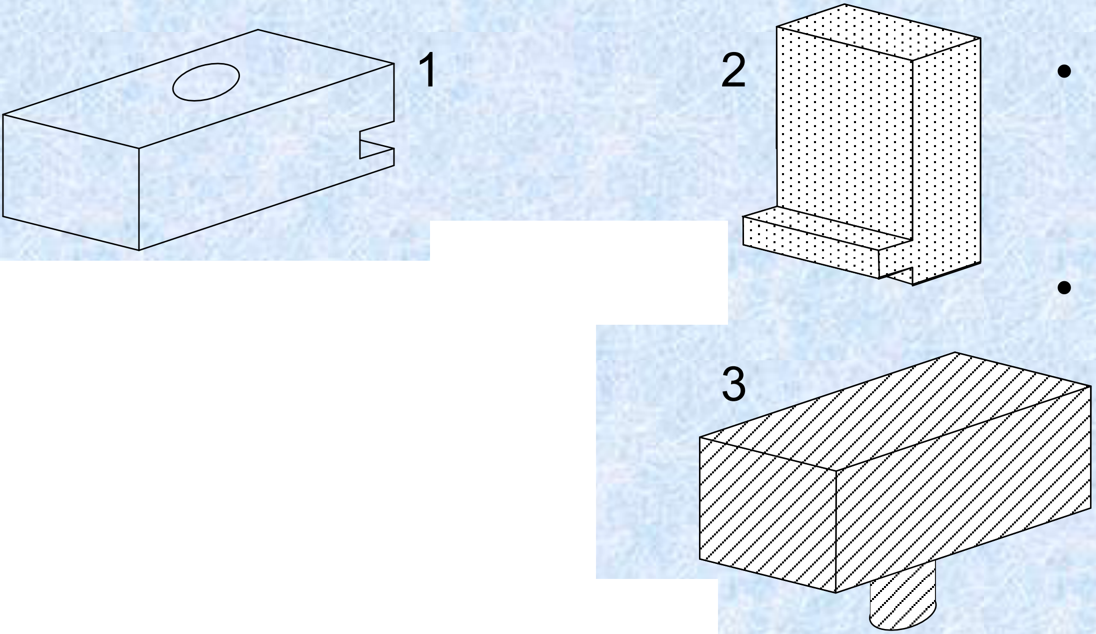
- Robots accomplish tasks by moving in the workspace
- How can we accomplish automated motion planning ? How to move given an initial and a final pose / posture (i.e. position + orientation) and the robot workspace)



Το Πρόβλημα του Προγραμματισμού της Κίνησης

- Motion Planning is quite more involved than obstacle avoidance.
- Computational complexity is a central issue in motion planning.

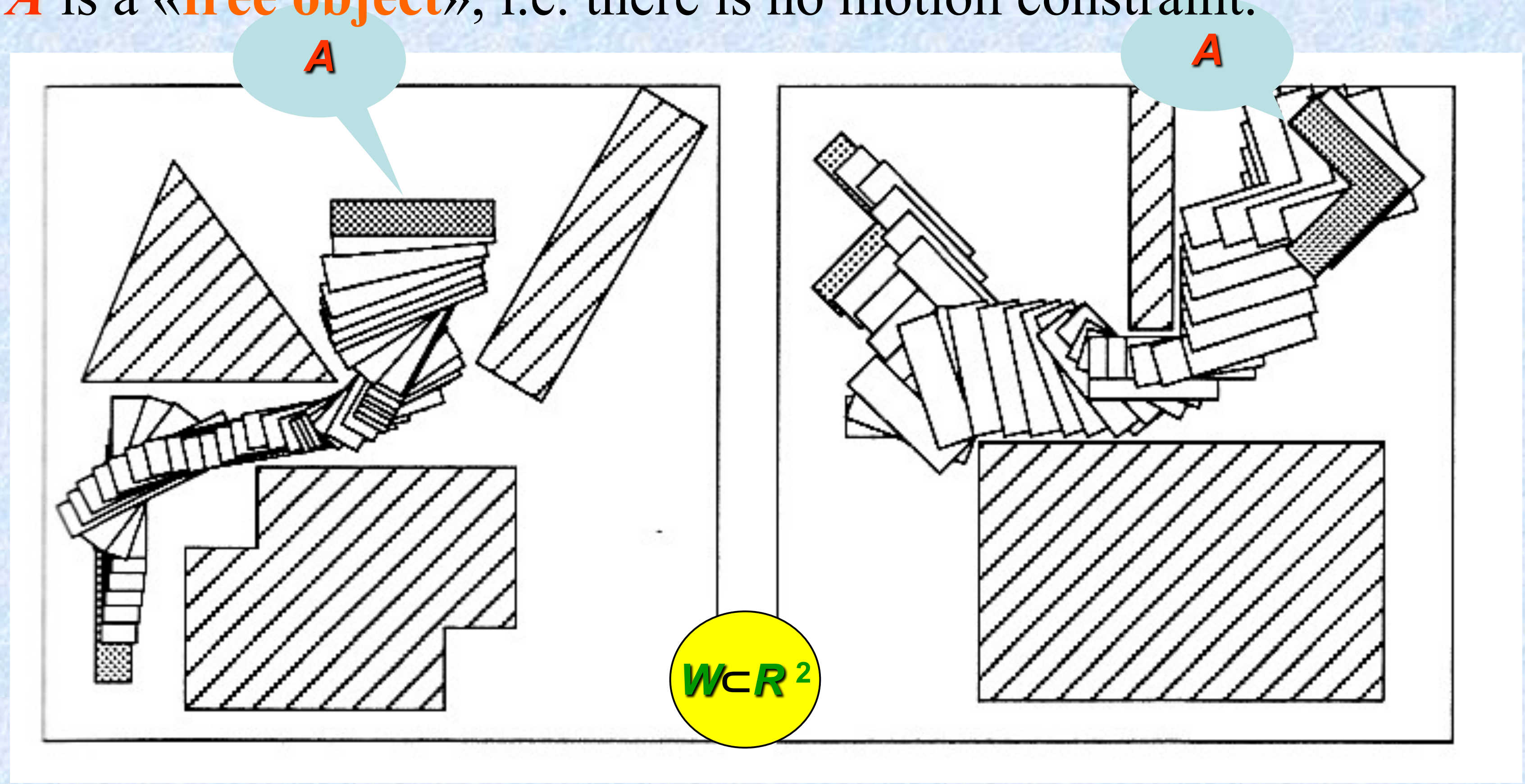
Motion Planning Issues



- This simple assembly is defined by the 3 composing parts and a sequence of 2 spatial relations.
- Every relation can be defined as a set of elementary relationships between geometric features e.g.
  - “Face A of obj. 1 must fit face B of obj. 2",
  - “Shaft C of obj. 3 fits hole D of obj. 1"
- Then it can be translated to a quantitative formulation e.g. using a “homogeneous transformation”

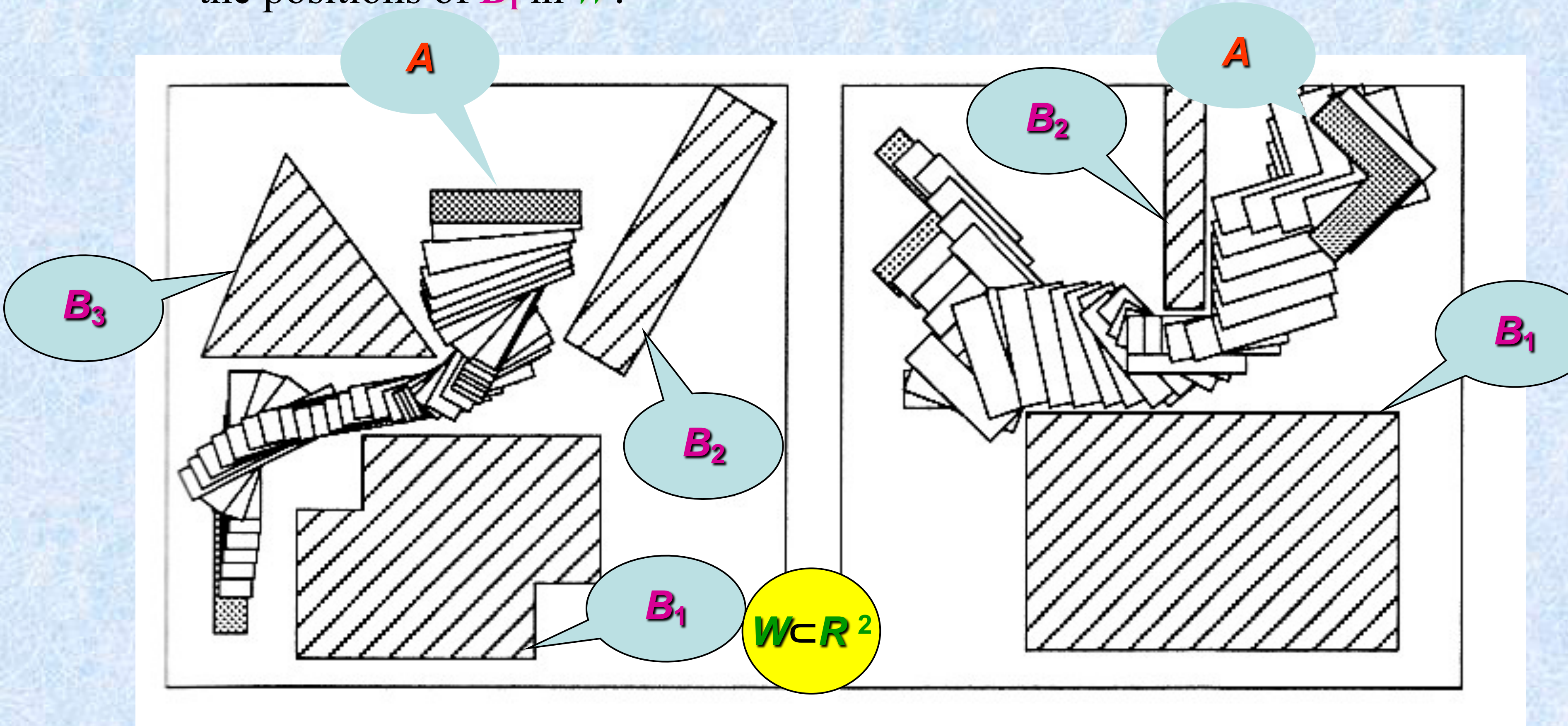
The Basic Motion Planning Problem

- *A* : solid object (robot) moving in the subspace *W* (work-space) of the euclidean space $\mathcal{R}^N$, where $N = 2$ **or** 3.
- *A* is a «**free object**», i.e. there is no motion constraint.



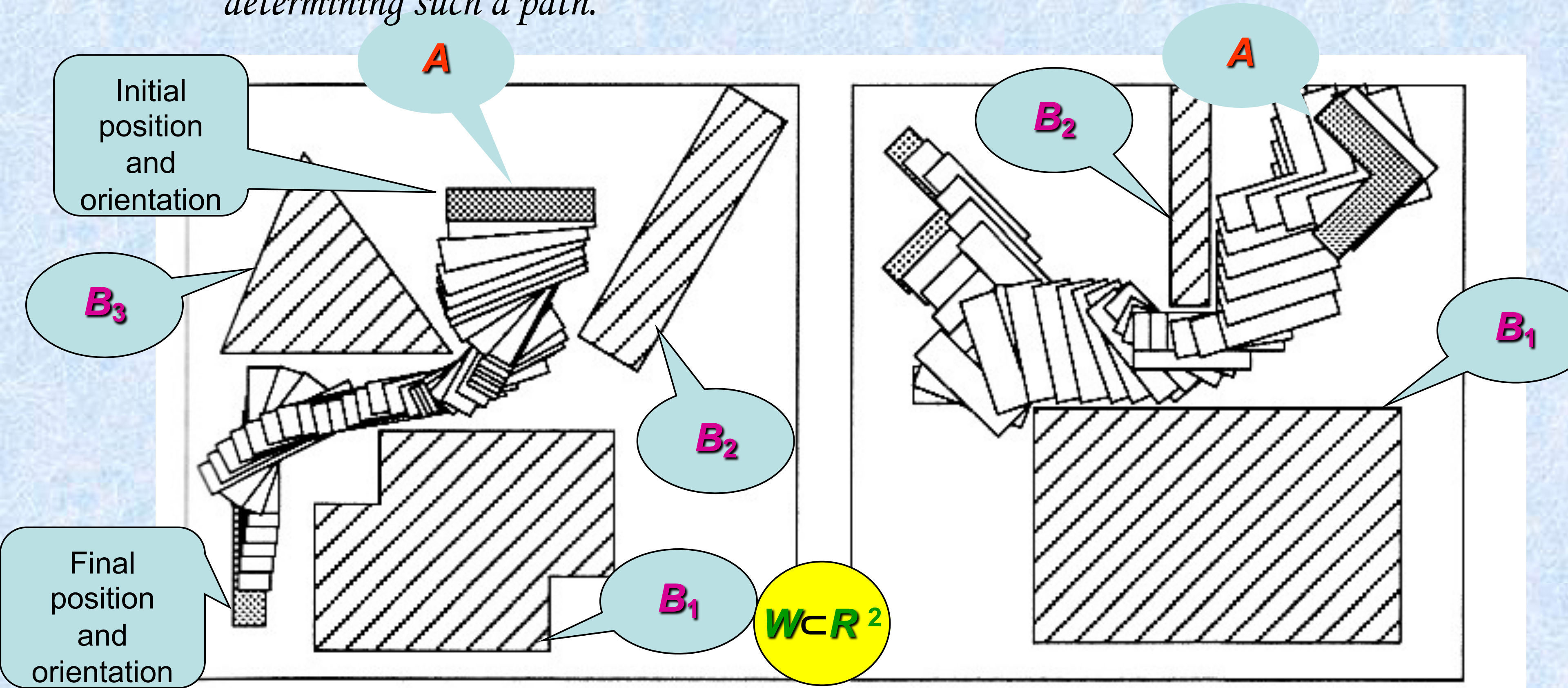
The Basic Motion Planning Problem

- ***B***$_1$**,** ***B***$_2$**, …,** ***B***$_m$ solid objects distributed over ***W***. ***B***$_i$ are called obstacles.
- We are given:
  - The geometry of ***A*****,** ***B***$_1$**,** ***B***$_2$**, …,** ***B***$_m$ and
  - the positions of ***B***$_i$ in ***W***.



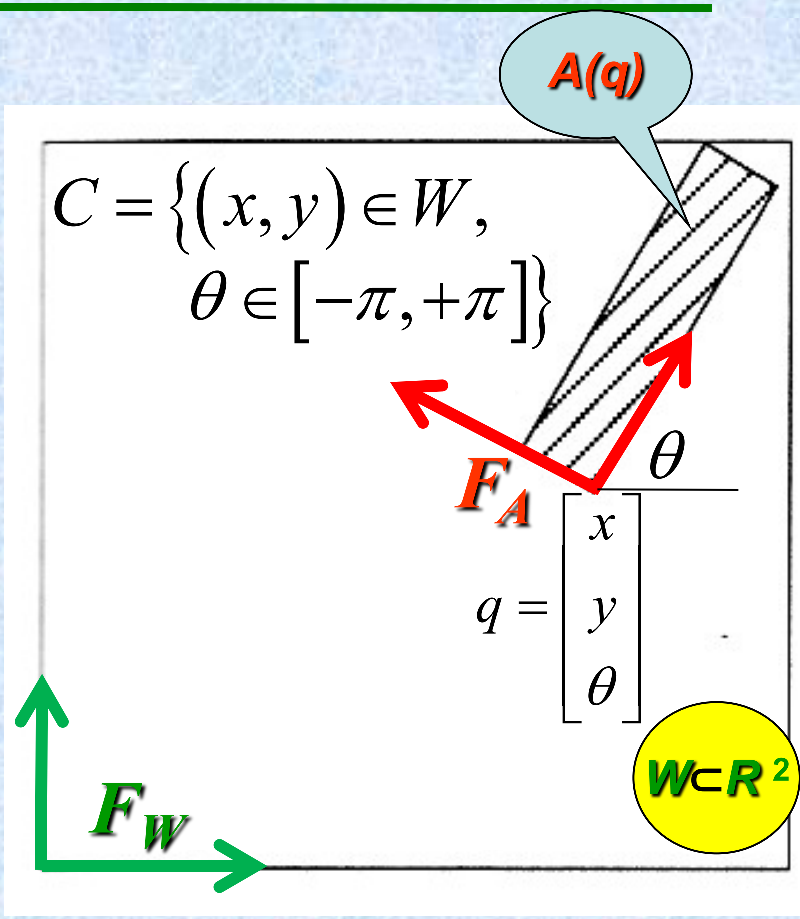
The Basic Motion Planning Problem

- The problem is:
  - *Considering an **initial** position & orientation and a **final** position & orientation of **A** in **W**, produce a path **τ** defining a continuous sequence of positions and orientations of **A** avoiding collisions with B_i, starting from the initial position & orientation and arriving at the final position & orientation. Report failure of determining such a path.*



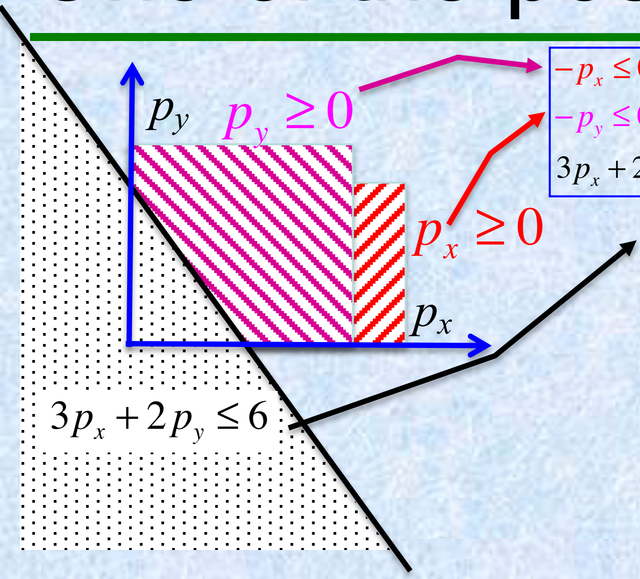
The configuration space

- F_A, F_W: Cartesian systems attached at A and W.
- The **posture** q of A is the position and orientation of F_A wrt F_W.
- The subset of W, occupied by A, at posture q, is $A(q)$.
- The **configuration space** C of A is the space of all postures q of A



«q» is used here to denote the posture of a robot. It should not be confused with the, previously used, DOFs of a robotic mechanism.

One of the possible Object-Representations



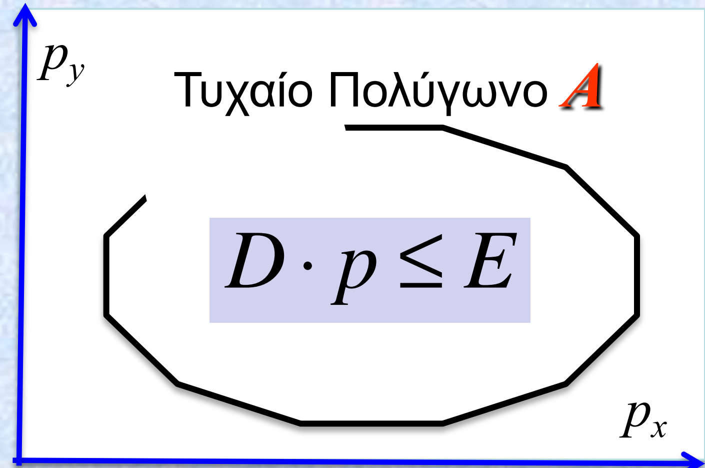
$-p_x \leq 0$
$-p_y \leq 0$
$3p_x + 2p_y \leq 6$

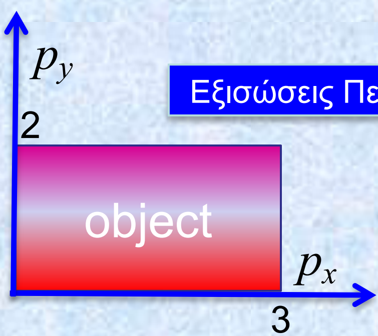
$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$p = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix}$$

$D_1 \cdot p \leq E_1$

Περιγραφή Τριγώνου A_1





Εξισώσεις Περιγραφής ?

$-p_y \leq 0$
$p_y \leq 2$
$-p_x \leq 0$
$p_x \leq 3$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

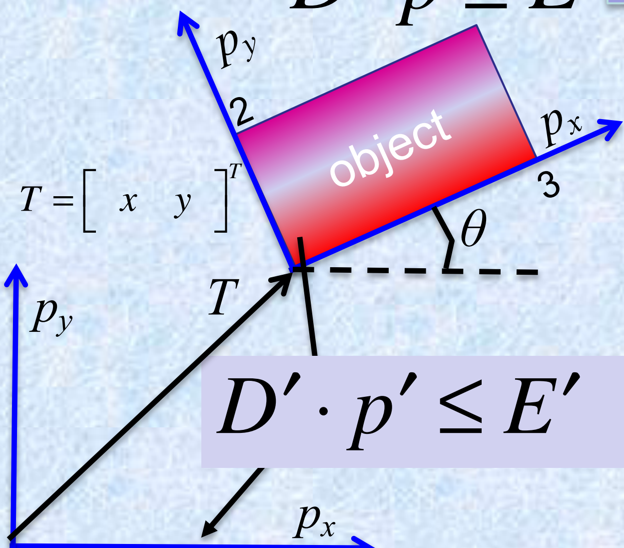
$$p = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix}$$

$D_2 \cdot p \leq E_2$

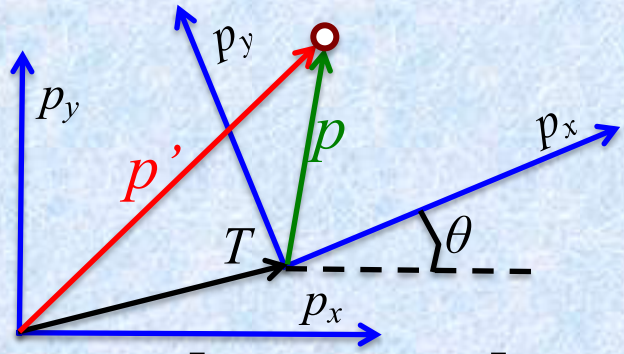
Περιγραφή Παραλληλογράμμου A_2

One of the possible Object-Representations

$$D \cdot p \le E$$



$$D' \cdot p' \le E' \quad ?$$



$$p' = R \cdot p + T \qquad R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \qquad T = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^T$$

$$|R| = 1 \neq 0 \Rightarrow p = R^{-1} \cdot p' - R^{-1} \cdot T$$

$$D \cdot \left(R^{-1} \cdot p' - R^{-1} \cdot T\right) \le E \Rightarrow \underbrace{\left(D \cdot R^{-1}\right)}_{D'} \cdot p' = \underbrace{\left(E + D \cdot R^{-1} \cdot T\right)}_{E'}$$

$$\mathbf{A(q)}: \quad D'(\theta) \cdot p' \le E'(\theta, x, y)$$

$$q = \begin{bmatrix} x & y & \theta \end{bmatrix}^T$$

Η έννοια της πορείας (path)

- A path of A from the initial posture q_{init} **to** q_{goal} **is a continuous mapping**

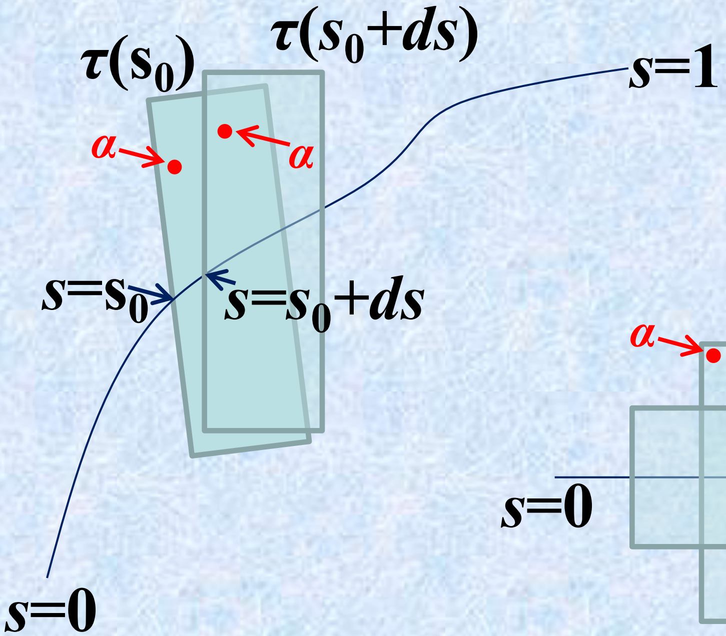
$$\tau(s):[0,1]\rightarrow C$$

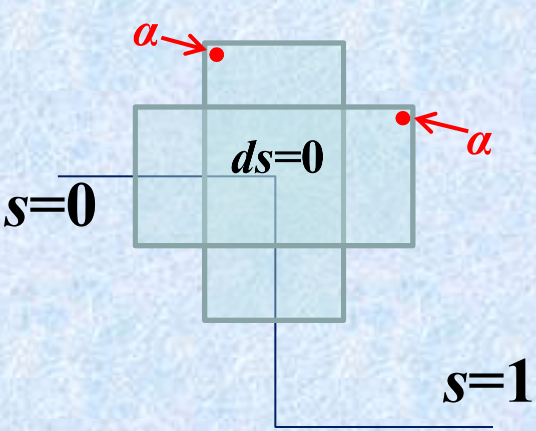
with $\tau(0)=q_{init}$ and $\tau(1)=q_{goal}$.

- Continuity of $\tau(s)$ means : $\forall \alpha \in A \; \forall s_0 \in [0,1] \quad \lim_{s\to s_0^+}\left(\max_{\alpha\in A}\left\|\alpha(\tau(s))-\alpha(\tau(s_0))\right\|\right)=0$

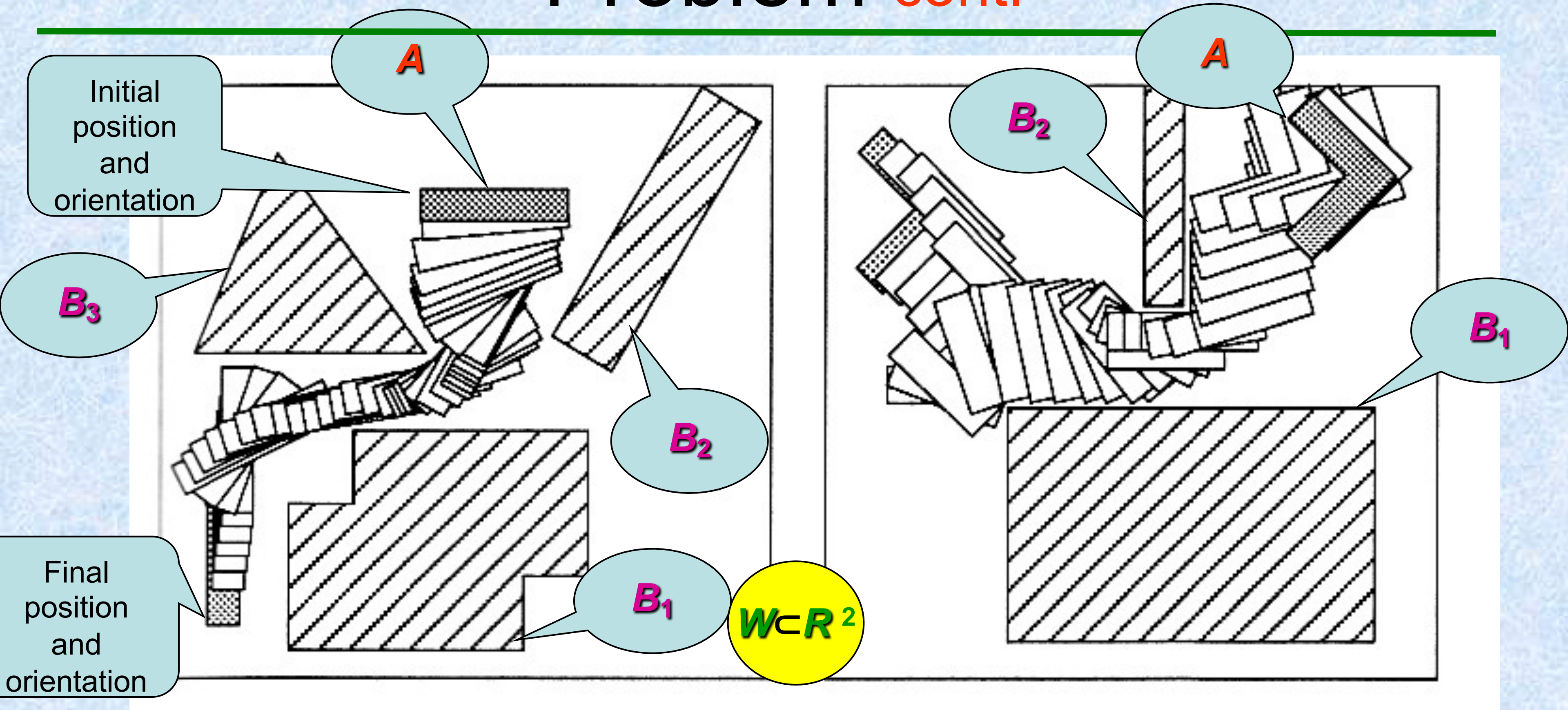
Obviously, the position of each $\forall \alpha \in A$ depends on the posture $q = \tau(s)$, of A.

- A being a «**free object**» means that if there are no obstacles then every path defined as above is feasible.
- Limitations:
  - If s – parameterization is wrt arc length then point rotations are not allowed
  - Other types of parameterization (e.g. time) do not allow decomposition to path and trajectory planning.





The Basic Motion Planning Problem cont.



Τα Εμπόδια στο Χώρο Στάσεων

Configuration space ***C*** of ***A***: i.e. the space of all postures ***q*** of ***A***

- An obstacle B_i in workspace W, is represented in C by

$$CB_i = \{q \in C \,/\, A(q) \cap B_i \neq \varnothing\}$$

called «**C-obstacle**».

- $\bigcup_{i=1}^{q} CB_i$ «**C-obstacle space**»
- «**Free space**»

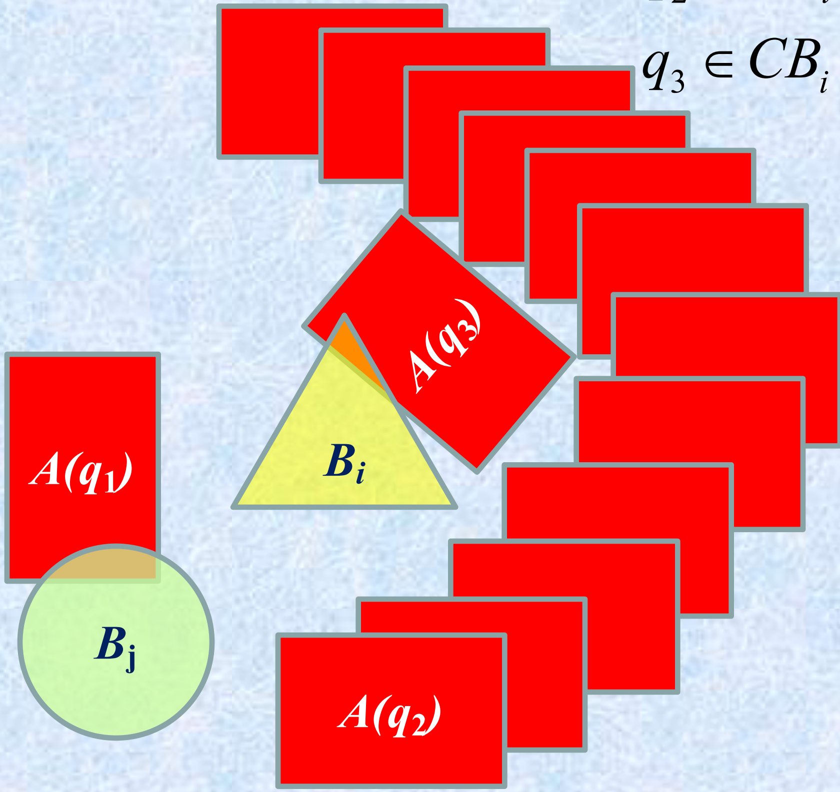
$$C_{free} = C \setminus \bigcup_{i=1}^{q} CB_i = \{q \in C \,/\, A(q) \cap (\bigcup_{i=1}^{q} B_i) \neq \varnothing\}$$

- $q \in C_{free}$: «**free pose**».
- **Free path** between two (free) poses q_{init} & q_{goal} : a continuous mapping $\tau(s):[0,1] \rightarrow C_{free}$, $\tau(0)=q_{init}$ and $\tau(1)=q_{goal}$.

$q_1 \notin CB_i$

$q_2 \notin CB_i$

$q_3 \in CB_i$



$q_1 \in CB_j$

$q_2 \notin CB_j$

$q_3 \notin CB_j$

free pose

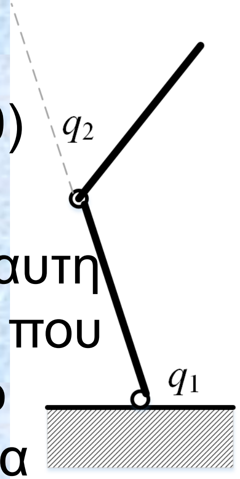
$q_1 \notin C_{free}$

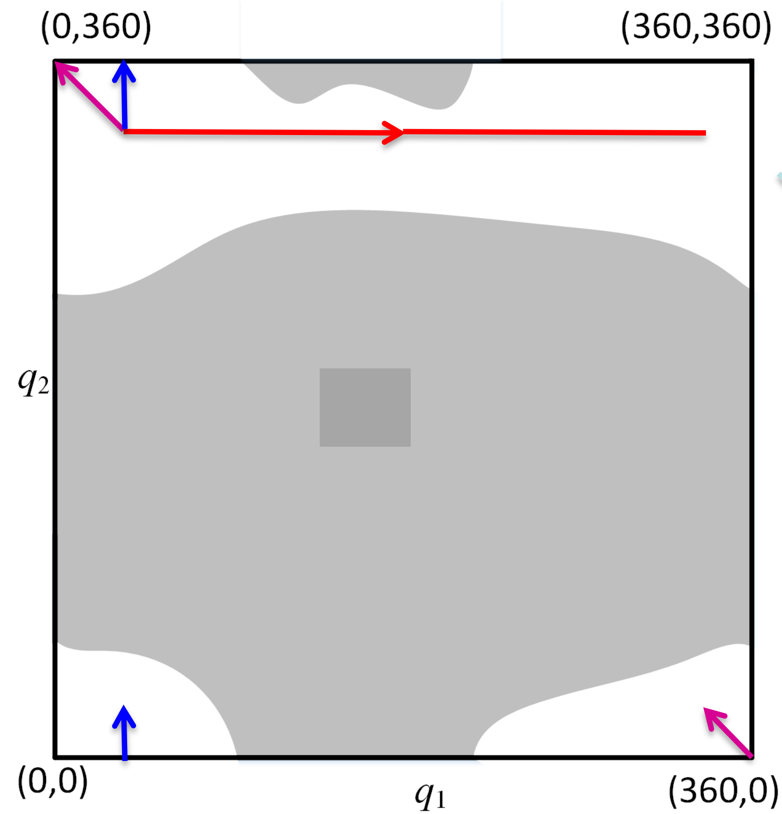
$q_2 \in C_{free}$

$q_3 \notin C_{free}$

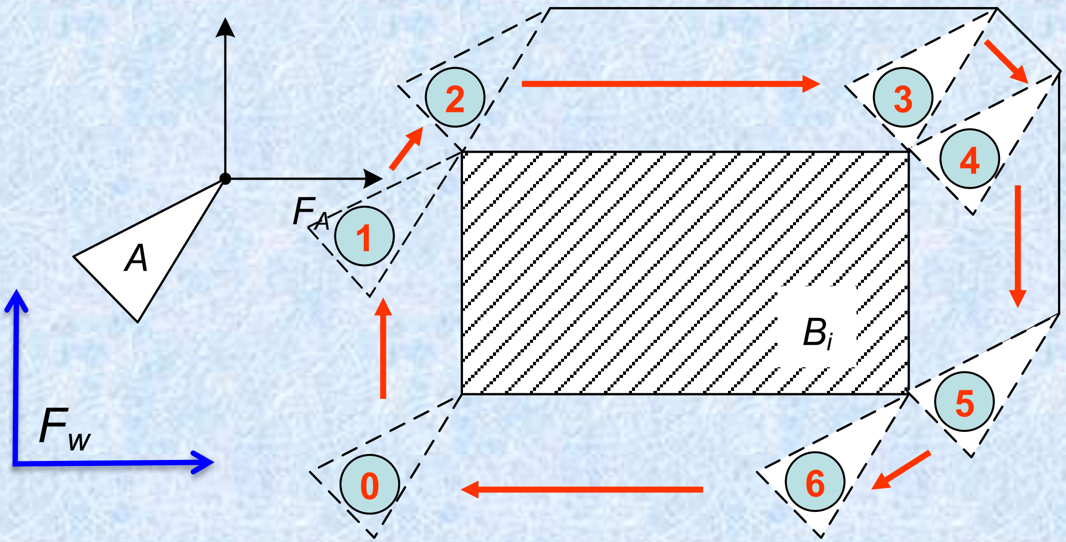
Παράδειγμα – 1 (θέμα)

- Για τον 2 DOF βραχίονα τύπου RR του σχήματος, που δρα σε περιβάλλον εμποδίων (δεν απεικονίζονται), απεικονίζεται:
- Ο χώρος στάσεων, δηλ. το τετράγωνο που δείχνει όλα τα δυνατά ***q*** του μηχανισμού του βραχίονα εκφρασμένα σε μοίρες,
- Η περιοχή-εμποδίων , δηλ. η σκούρα περιοχή που απεικονίζει τις αδύνατες (ένεκα εμποδίων) στάσεις, και
- Ο ελεύθερος χώρος (λευκή περιοχή)
- **Ερωτήσεις**:
- Ποιά από τις στάσεις A(20,340) και A'(180,180) είναι δυνατή ?
- Αν ξεκινήσει ένα ρομπότ από αυτη τη στάση, από τις παραπάνω, που είναι δυνατή μπορεί να πάει το ρομπότ χωρίς συγκρούσεις στα B(340,340), D(340,20), E(20,20)?
- Σε όποια από αυτά είναι δυνατή η κίνηση, να σχεδιασθεί η πορεία που αντιστοιχεί στην ελάχιστη απόσταση <u>στο χώρο αρθρώσεων</u>



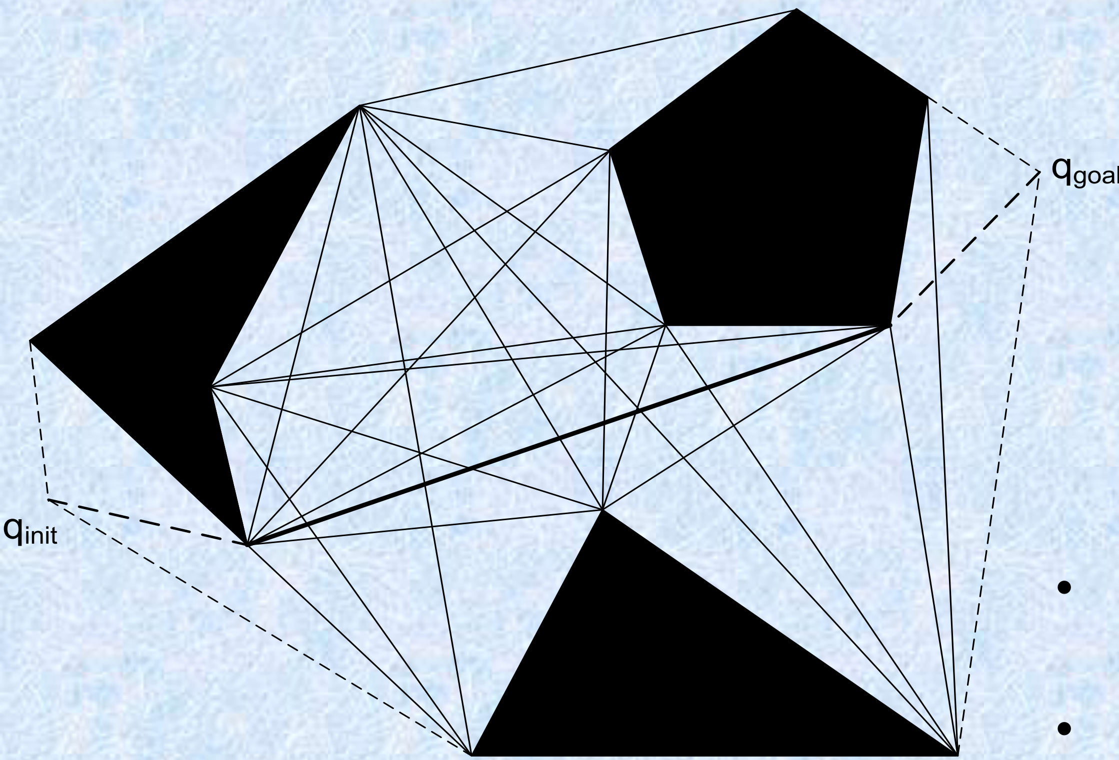


Παράδειγμα - 2



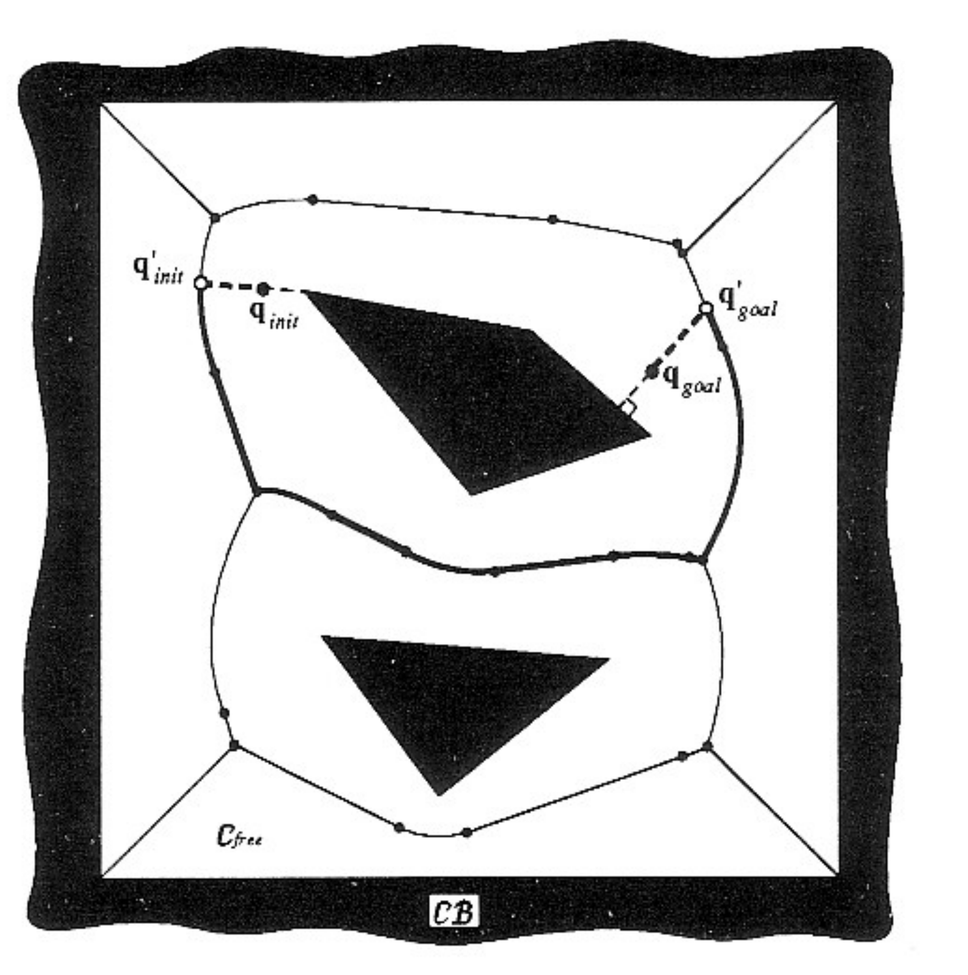
- Robot ***A*** (triangle) freely translating without changing orientation.
- F_A : coordinate frame attached at a fixed point of ***A***.
- The pose q of ***A*** can be represented by the coordinates of F_A wrt F_W i.e. $q=(x,y)$. Thus, the configuration space of ***A*** is $C=R^2$.
- The C-obstacle CB_i is the set of all those q that can be "occupied" by F_A without collision of ***A*** with B_i.
- CB_i is obtained by enlarging obstacle B_i using ***A*** as it moves from posture **0** to **1, 2, 3, 4, 5, 6** following the direction of red arrows
- Path planning of ***A*** wrt B_i is equivalent to motion planning of the specific point of ***A*** , where F_A is attached, wrt CB_i.

Roadmap: visible path



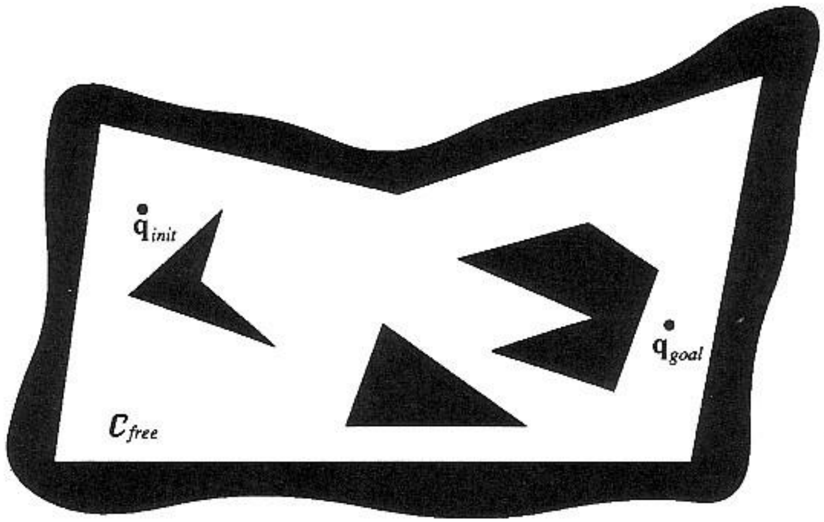
- Visible path in 2-D space with polygonal obstacles.
- The graph nodes are the initial and final poses and the vertices of the obstacles.
- Two nodes are connected only if their line segment does not intersect the obstacles.

Roadmap: Διάγραμμα Voronoi



Voronoi diagram for a configuration space of polygonal C-obstacles.

The free space is bounded by a rectangle.

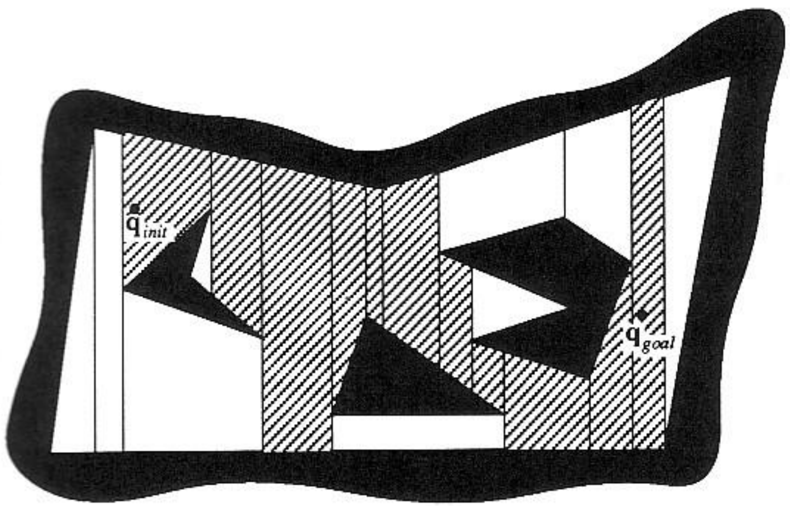


(α)

Accurate Cell Decomposition

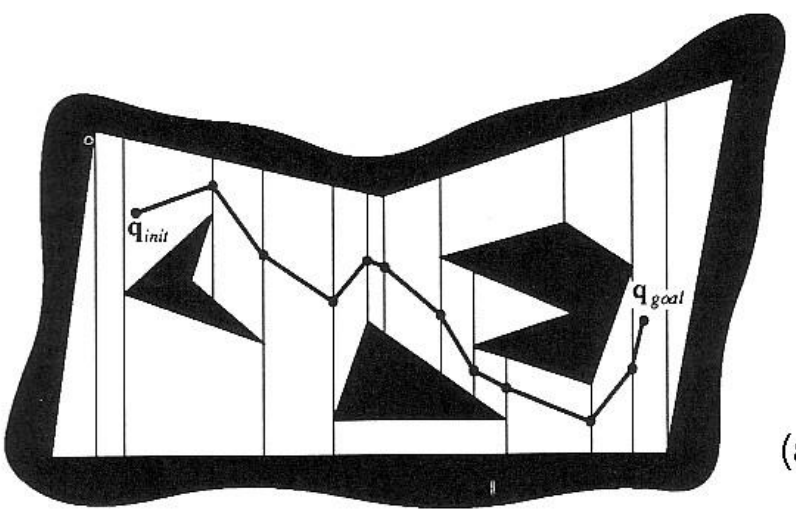
- Free space and obstacles (fig. α).
- **1st step** : decomposition of free space in trapezoidal and traingular "cells" (fig. β).
- **2nd step** : connectivity graph (fig. γ) and search over it to find a path (bold line).

Accurate Cell Decomposition cont.



(δ)

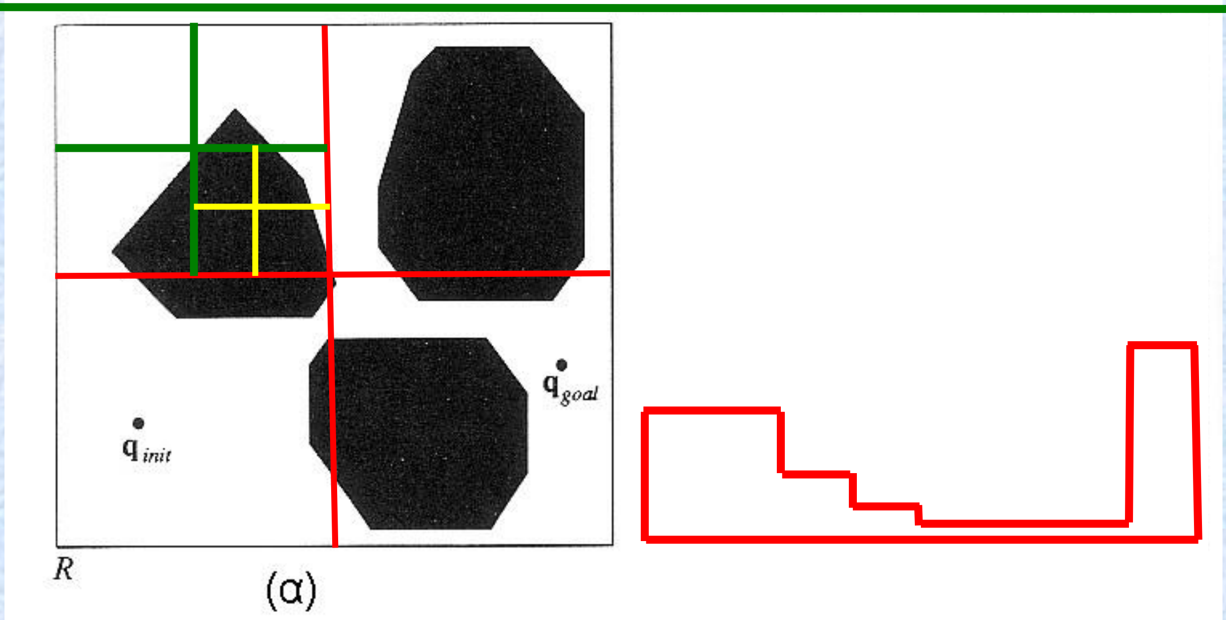
- The path on the connectivity graph defines the cell sequence.



(ε)

- **3rd step** from the cell sequence to a free path using an optimization criterion .

Approximate Cell Decomposition



- The free space bounded by an outer square and 3 polygons (fig. α).
- R is decomposed in 4 equal squares.
- If a square is wholly found in the free space or in the C-obstacle space then it is not decomposed further.
- Otherwise it is decomposed in 4 squares until a specific resolution is achieved.
- The result is presented on fig. β.
- White cells are not located in the C-obstacle space.
- Black cells are located in the C-obstacle space.
- Grey cells are intersected by the C-obstacle space.
- This is a "***quadtree***“ decomposition.
- The bold face line represents a free channel.

Introduction to Artificial Potential Fields

Basic Idea

- ***Free Space C_{free}***
- The point robot moves following the model $\dot{q} = u$
- We consider
  - A virtual (positive) charge on the robot found at $q \in C_{free}$
  - A virtual (negative) charge on the destination q_{goal} results to an attractive potential $\varphi_{attr}(q)$ on the robot found at $q \in C_{free}$
  - virtual (positive) charges on the obstacles CB_i introduce repulsive potential $\varphi_{rep}(q)$ on the robot found at $q \in C_{free}$,

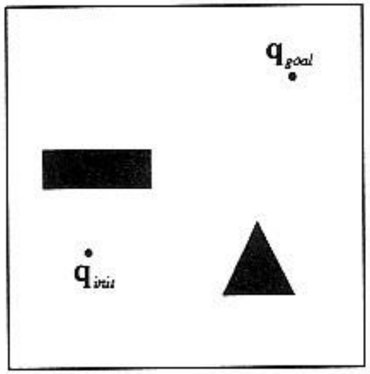
  And we obtain an artificial potential field

$$\varphi(q) \triangleq \varphi_{attr}(q) + \varphi_{rep}(q)$$

- …(hoping that) it will lead the robot to q_{goal} based on the control law

$$\dot{q} = u = -\nabla_q \varphi(q)$$

Τεχνητά Δυναμικά Πεδία: Παράδειγμα

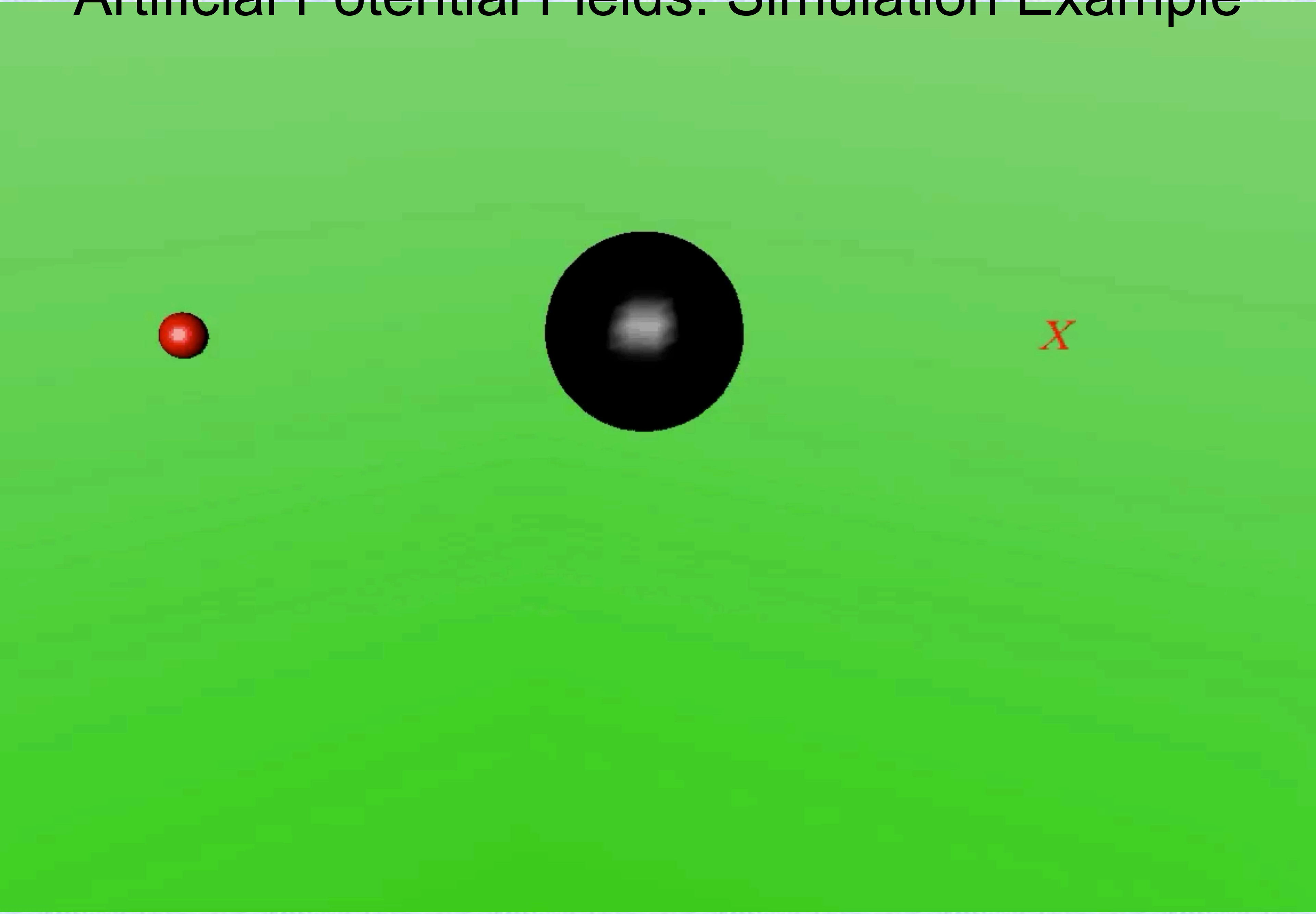
(α)


- 2-D space with 2 polygonal obstacles (fig. α).
- Fig. (β) represents the attractive potential $\varphi_{attr}(q)$ due to final posture q_{goal}.
- Fig. (γ) represents the repulsive potential $\varphi_{rep}(q)$ due to C-obstacles.
- Fig. (δ) represents $\varphi(q)=\varphi_{attr}(q)+\varphi_{rep}(q)$
- Fig. (ε) represents the equipotential lines of the total potential and the path obtained using steepest descent, for an example case

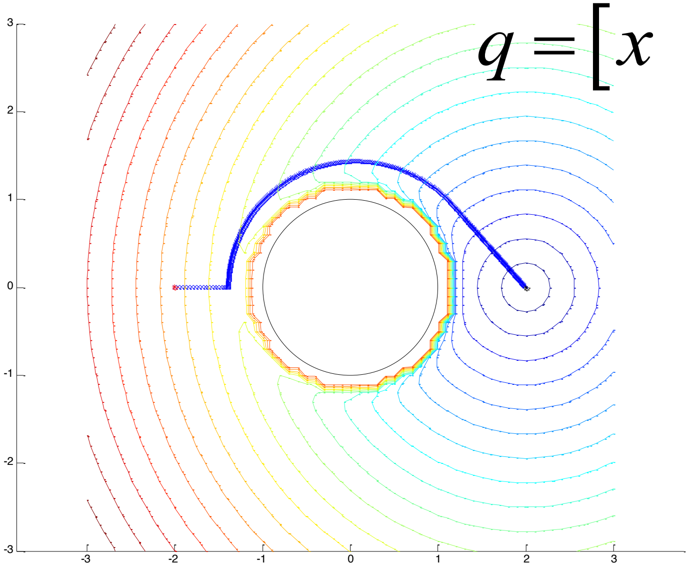
$$\dot{q} = -\nabla_q \varphi(q)$$

- Fig. (ζ) represents the corresponding vector field found at each point of the free space.

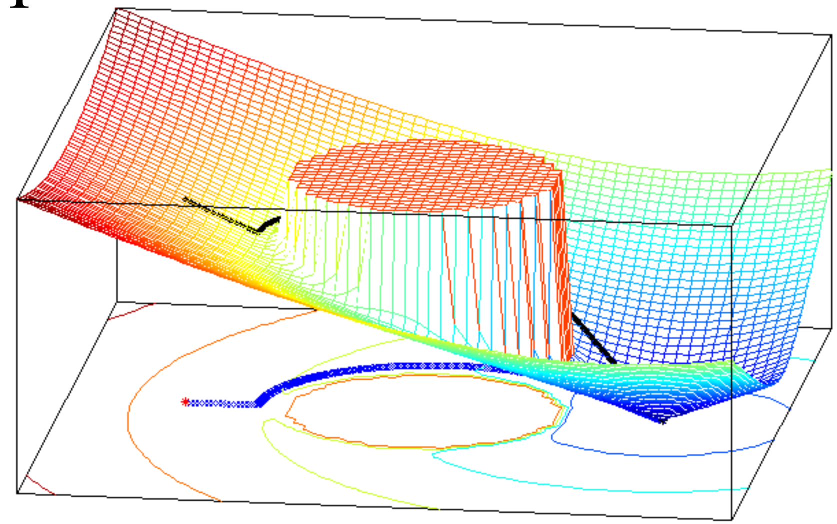
Artificial Potential Fields: Simulation Example



Artificial Potential Fields: Steepest Descent

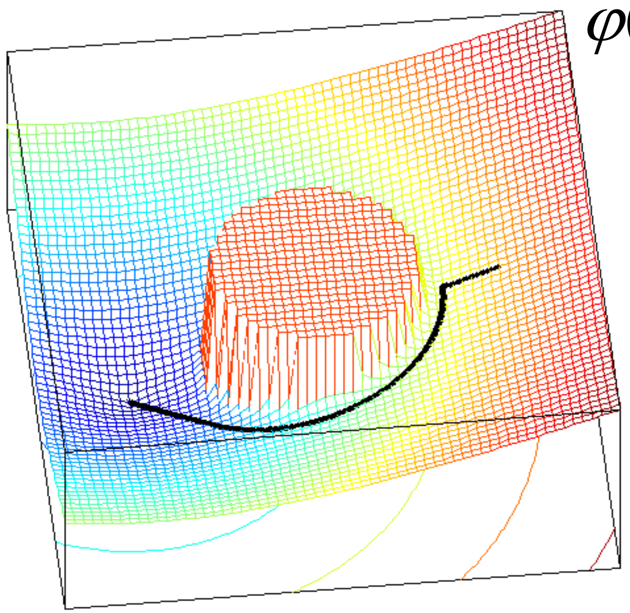


$$q = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^T : \text{ robot position}$$

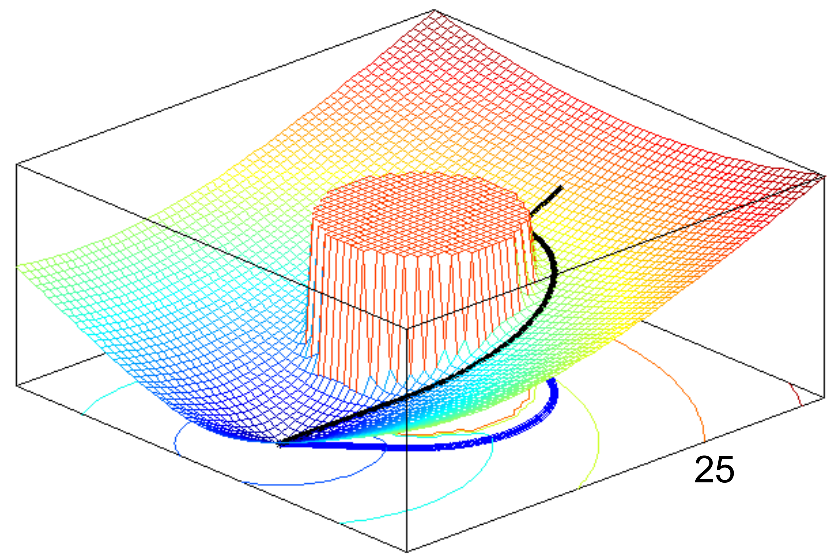


$$\dot{q} = u$$

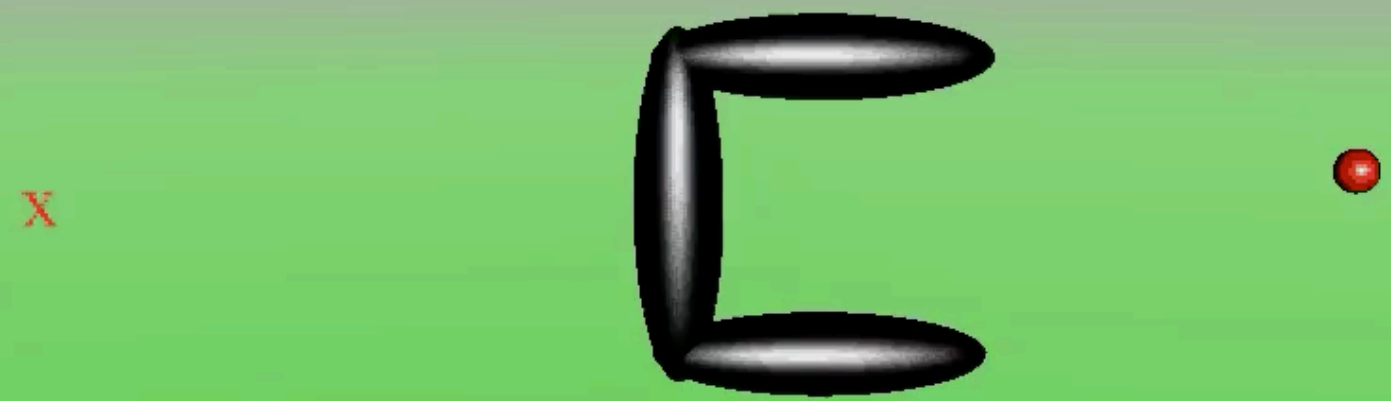
$$\varphi(q, q_d): \text{ Potential Function}$$



$$u = -K \frac{\partial \varphi}{\partial q}$$

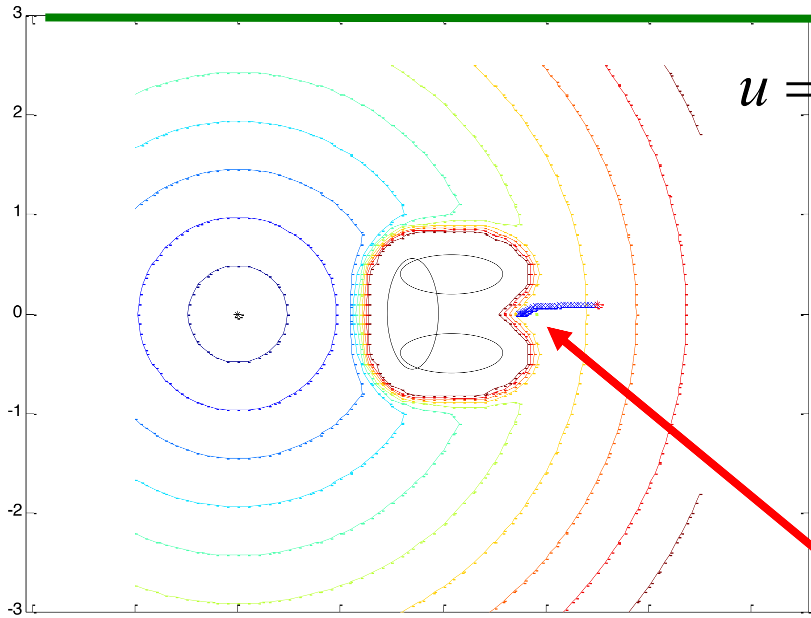


Artificial Potential Fields: Do they always work?

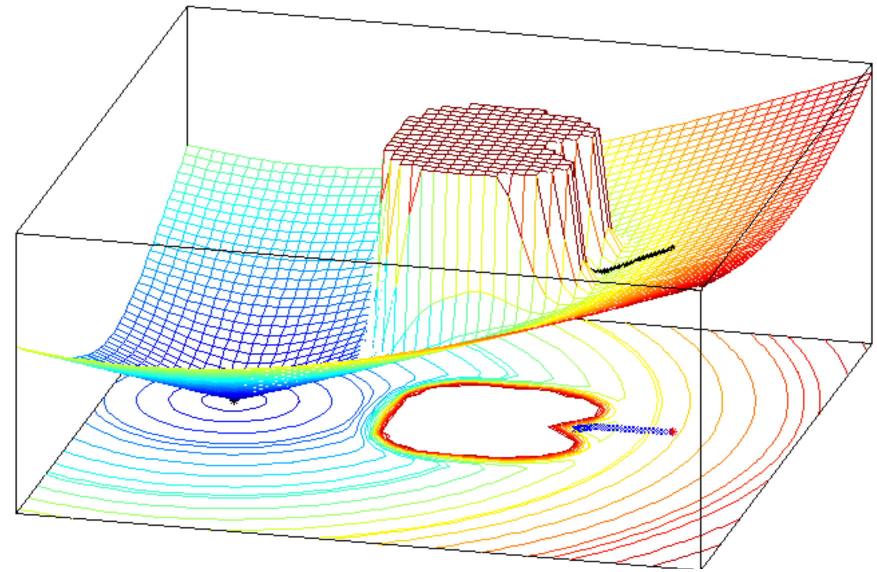


- The positive robot is NOT lead to the negative destination because it is trapped in a local minimu due to the positive obstacle…

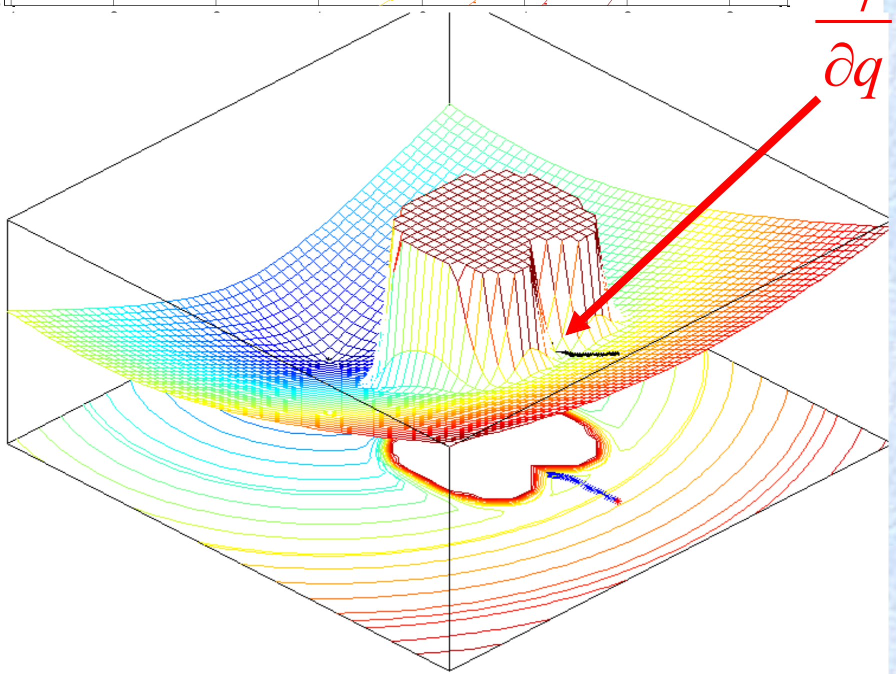
Artificial Potential Fields: Why they do not always work?

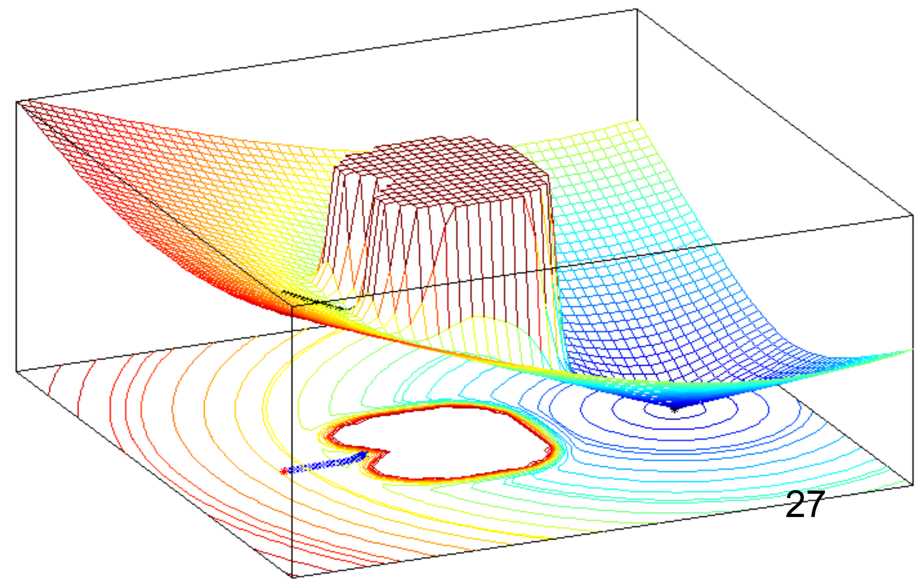


$$u = -K \frac{\partial \varphi}{\partial q}$$



$$\frac{\partial \varphi}{\partial q} = 0$$

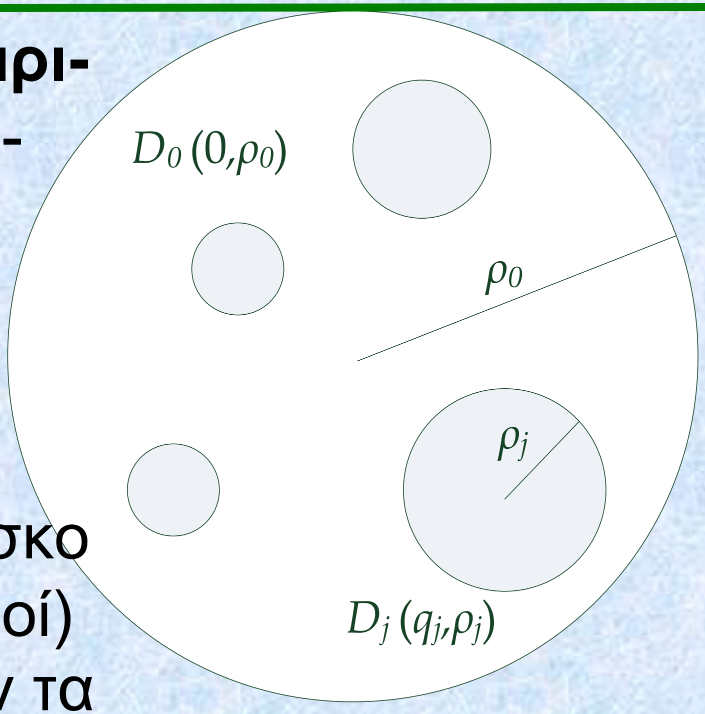




Navigation Functions: "curing" the Artificial Potential Fields

- Η **NF** ***φ(q)*** είναι μια **ειδική μορφή συνάρτησης δυναμικού**, η οποία έχει ένα μοναδικό ελάχιστο, το τελικό configuration q_G του ρομπότ. Δηλαδή αν το ρομπότ κινηθεί με το νόμο ελέγχου . τότε $u = -\nabla\varphi(q)$ $\quad q \xrightarrow[t\to\infty]{} q_G$
- Προφανώς, ως συνάρτηση δυναμικού, η συνάρτηση πλοήγησης χαρακτηρίζεται
  - από μια συνάρτηση «ελκτικού» δυναμικού, που έλκει το ρομπότ προς το τελικό configuration q_G, και
  - από μια συνάρτηση «απωστικού» δυναμικού, που ορίζεται γύρω από τα εμπόδια του χώρου και ωθεί το ρομπότ μακριά από αυτά
- Η **NF** ορίζεται για χώρους που περιλαμβάνουν **εμπόδια γνωστής γεωμετρίας** και βρίσκονται σε **γνωστές, σταθερές θέσεις**.

Navigation Functions: “curing” the Artificial Potential Fields



- Η απλούστερη μορφή χώρου είναι **σφαιρικός χώρος**, αποτελούμενος από μια μεγάλη σφαίρα που περιέχει μικρότερες σφαίρες στο εσωτερικό της, οι οποίες αναπαριστούν τα φυσικά εμπόδια.
- Ο **χώρος εργασίας** (workspace) του ρομπότ οριοθετείται από τον κυκλικό δίσκο $D_0(0,\rho_0)$ στον οποίο περιέχονται M (μικροί) κυκλικοί $D_j(q_j,\rho_j)$ δίσκοι , που οριοθετούν τα εμπόδια.
- Τα q_j, ρ_j είναι γνωστά. Οι μικροί δίσκοι δεν τέμνονται μεταξύ τους και βρίσκονται εξολοκλήρου μέσα στο μεγαλύτερο δίσκο.
- Ο **ελεύθερος χώρος** W_{free}, στον οποίο μπορεί να κινηθεί το ρομπότ αποφεύγοντας τη σύγκρουση με τα εμπόδια, προκύπτει αν από το χώρο εργασίας W αφαιρεθεί ο συνολικός χώρος των εμποδίων.

Navigation Functions: "curing" the Artificial Potential Fields

- Οι Rimon και Koditschek απέδειξαν ότι η **NF** ***φ(q)*** πρέπει να πληροί συγκεκριμένες μαθηματικές ιδιότητες, ώστε να εγγυάται τη σύγκλιση του ρομπότ στο επιθυμητό configuration, με ταυτόχρονη αποφυγή των εμποδίων του χώρου.
- Η συνάρτηση πρέπει να περιλαμβάνει
  - το **Ελκτικό Δυναμικό:** Συνάρτηση απόστασης από το τελικό σημείο

$$\gamma(q) = \left\| q - q_G \right\|^{2\kappa}$$

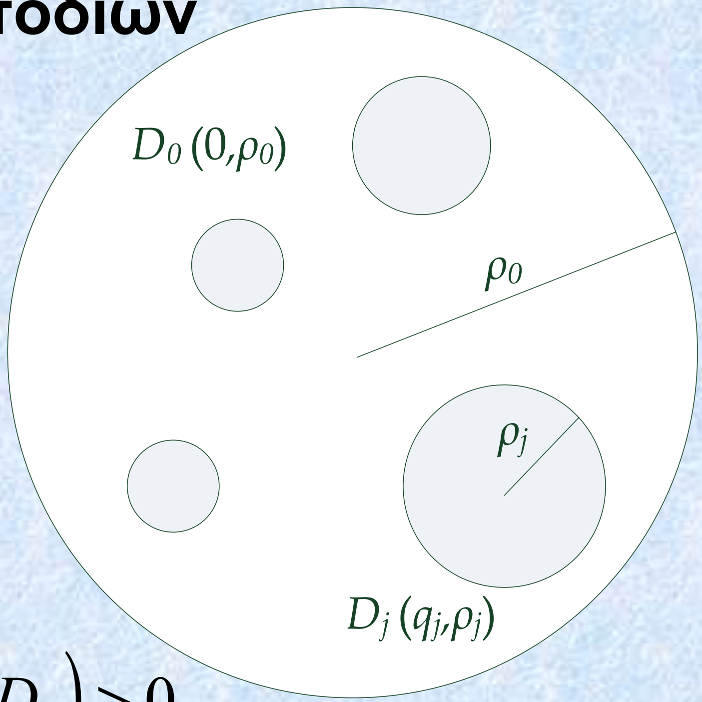
    Έλκει το ρομπότ στο μοναδικό ελάχιστο της συνάρτησης (το τελικό configuration), με τη παράμετρο $\boldsymbol{\kappa}$ να δείχνει την «ενταση της έλξης», και
  - το **Απωστικό δυναμικό:** ωθεί το ρομπότ μακριά από τα όρια των εμποδίων.

Navigation Functions: “curing” the Artificial Potential Fields

- **Απωστικό Δυναμικό: Συνάρτηση εμποδίων**
- Παράγων οφειλόμενος από τα όρια του workspace

$$\beta_0(q) = -\|q - q_0\|^2 + \rho_0^2$$

$$\beta_0(q_0) = \rho_0^2 \qquad \beta_0(q \in \tilde{D}_0) = 0$$



- Παράγοντες οφειλόμενοι στα εμπόδια

$$\beta_j(q) = \|q - q_j\|^2 - \rho_j^2$$

$$\beta_j(q_j) = -\rho_j^2 \qquad \beta_j(q \in \tilde{D}_j) = 0 \quad \beta_j(q \notin D_j) > 0$$

- Συνολική «Συνάρτηση Εμποδίων»

$$\beta(q) = \prod_{i=0}^{M} \beta_i(q)$$

Navigation Functions: "curing" the Artificial Potential Fields

- Αν επιλεχθεί ως Συνάρτηση Πλοήγησης (Navigation Function – ***NF***) η

$$\hat{\varphi}(q) = \frac{\text{ελκτικό δυναμικό}}{\text{απωθητικό δυναμικό}} = \frac{\gamma(q)}{\beta(q)} = \frac{\left\| q - q_G \right\|^{2\kappa}}{\prod_{i=0}^{M} \beta_i(q)}$$

παρατηρείστε ότι

$$\hat{\varphi}(q) = 0 \Leftrightarrow q = q_G \qquad \lim_{q \to \tilde{D}_j} \hat{\varphi}(q) = \infty \qquad j = 0,1,\ldots,M$$

- Επειδη θέλουμε το πεδίο τιμών της ***NF*** να είναι το [0,1], προτείνουμε την ***NF*** : $\varphi' = \sigma \circ \hat{\varphi} = \sigma(\hat{\varphi})$ όπου

$$\sigma(x) \triangleq \frac{x}{1+x}$$

- Επομένως παίρνουμε την αναλυτική συνάρτηση

$$\varphi' = \sigma \circ \hat{\varphi} = \sigma(\hat{\varphi}) = \frac{\gamma}{\beta + \gamma}$$

$$\varphi'(q) = 0 \Leftrightarrow q = q_G \qquad \varphi'(q \in \tilde{D}_j) = 1 \qquad j = 0,1,\ldots,M$$

Navigation Functions: "curing" the Artificial Potential Fields

- Η αναζητούμενη ***NF φ(q)*** πρέπει να είναι <u>*συνάρτηση Morse*</u> : δηλ. στα κρίσιμα σημεία της (δηλ. στα σημεία που $\nabla\varphi(q)=0$) πρέπει $\left|\nabla^2\varphi(q)\right|\neq 0$ (Γιατί?).
- Η συνάρτηση $\varphi=\sigma_d\circ\varphi'$ όπου $\sigma_d(x)\triangleq x^{1/\kappa}$ είναι

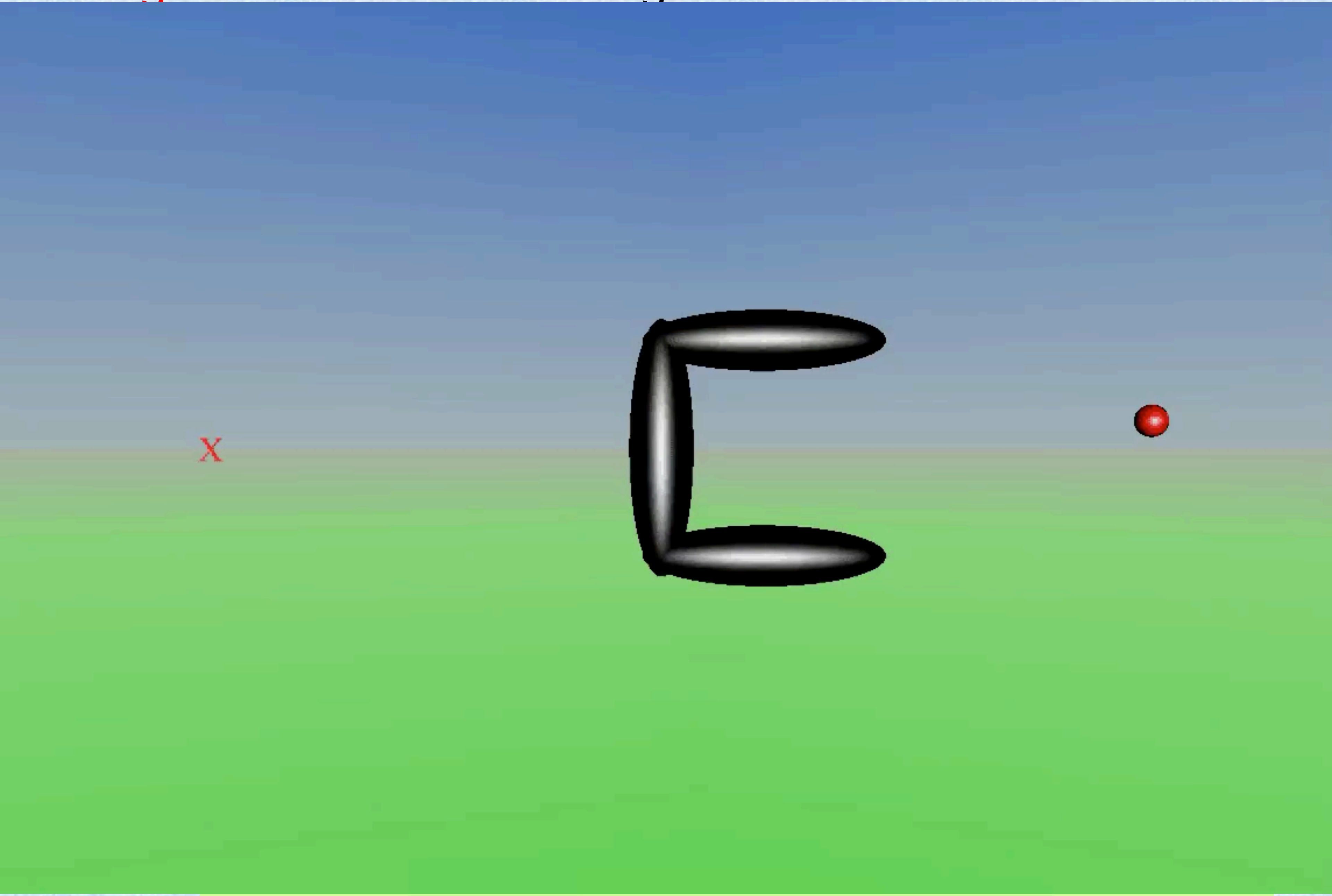
$$\varphi=\sigma_d\circ\sigma\circ\hat{\varphi}=\left(\frac{\gamma}{\gamma+\beta}\right)^{\frac{1}{\kappa}}=\left(\frac{\left\|q-q_G\right\|^{2\kappa}}{\left\|q-q_G\right\|^{2\kappa}+\prod_{i=0}^{M}\beta_i(q)}\right)^{\frac{1}{\kappa}}$$

  και αποδεικνύενται ότι υπάρχει N, όπου όταν $\kappa\geq N$, η **φ(q)** είναι συνάρτηση Morse και επομένως είναι συνάρτηση πλοήγησης.
- Έτσι, όταν η είσοδος στο σύστημα $\dot{q}=u$ είναι $u=-K\cdot\nabla\varphi(q)$ το ρομπότ συγκλίνει στο τελικό configuration, δηλ. $q\xrightarrow[t\to\infty]{}q_G$, ξεκινώντας σχεδόν από οποιαδήποτε αρχική συνθήκη, με ταυτόχρονη αποφυγή των εμποδίων.

Navigation Functions: “curing” the Artificial Potential Fields

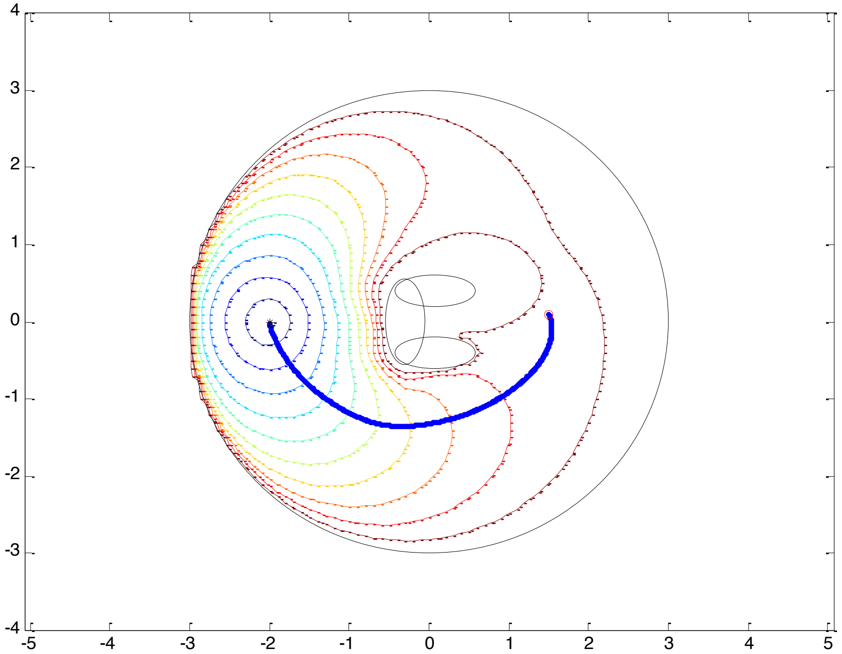
- Η σύγκλιση στο τελικό configuration είναι από «σχεδόν όλες» τις αρχικές συνθήκες. Αυτό συμβαίνει γιατί κάθε εμπόδιο του χώρου εισάγει **τουλάχιστον ένα σημείο σάγματος** (saddle point) στη ***NF***, που είναι όμως σημείο ***ασταθούς*** ισορροπίας.
- Η μεθοδολογία κατάστρωσης των συναρτήσεων πλοήγησης επεκτείνεται και εφαρμόζεται σε χώρους που περιέχουν εμπόδια (ή σύνολα επικαλυπτόμενων εμποδίων) με ***γεωμετρία αστεροειδούς***. Με χρήση κατάλληλων συμμόρφων μετασχηματισμών, ένας τέτοιος χώρος μετασχηματίζεται σε σφαιρικό και, αντίστοιχα, όταν ευρεθεί η συνάρτηση πλοήγησης του σφαιρικού κόσμου μετασχηματίζεται κατάλληλα σε συνάρτηση πλοήγησης τού πραγματικού κόσμου.
- Έτσι, οι συναρτήσεις πλοήγησης εφαρμόζονται επιτυχώς στον προγραμματισμό της πορείας ενός ρομπότ σε έναν πραγματικό κόσμο που περιλαμβάνει εμπόδια αρκετά πολύπλοκης γεωμετρίας.

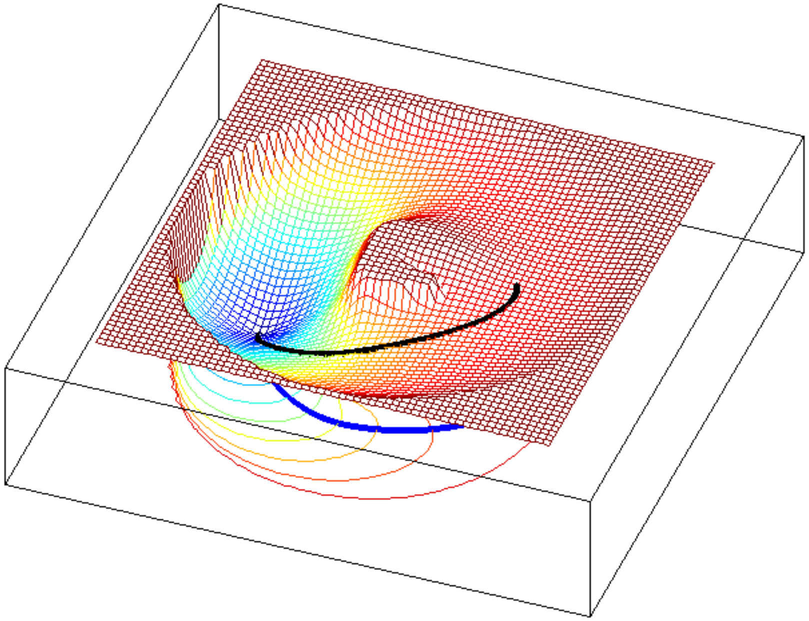
Navigation Functions: “curing” the Artificial Potential Fields



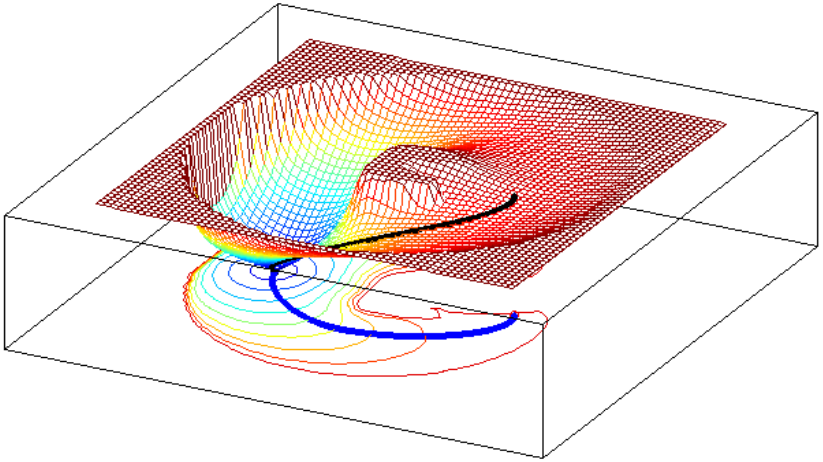
its potential is based at glolal information.

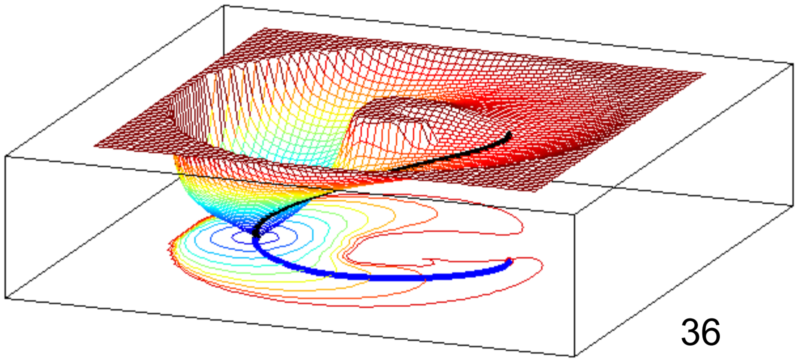
Navigation Functions: The Global info is the "cure"



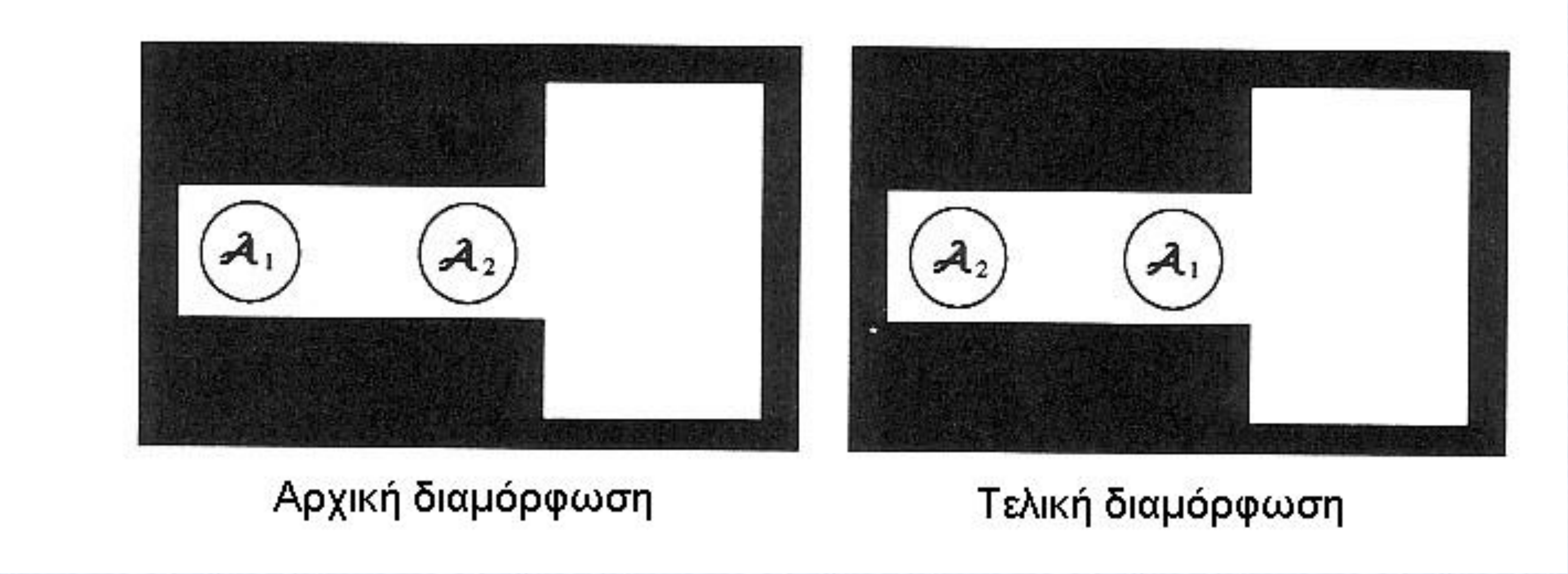


$$\frac{\partial \varphi}{\partial q} = 0 \Leftrightarrow q = q_d$$



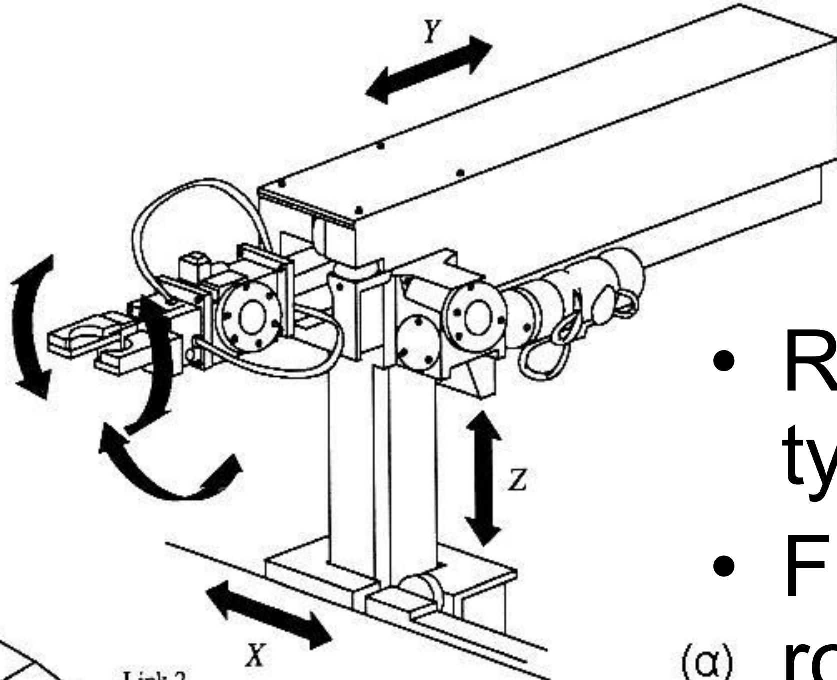


Multiple Robots

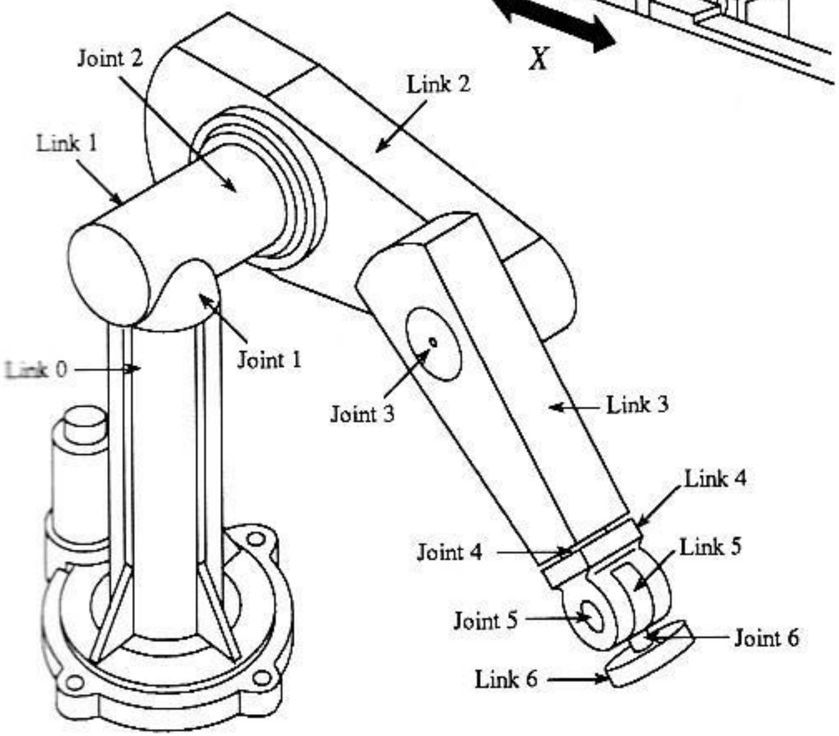


- Centralized vs De-centralized planning

Articulated Robots



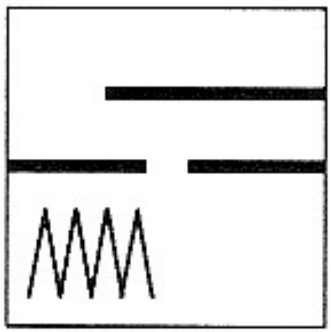
(α)



(β)

- Robotic manipulator: typical case.
- Fig. (α) : cartesian robot with 3 prismatic and 3 rotational joints.
- Fig. (β) : represents a robot with 6 rotational joints.

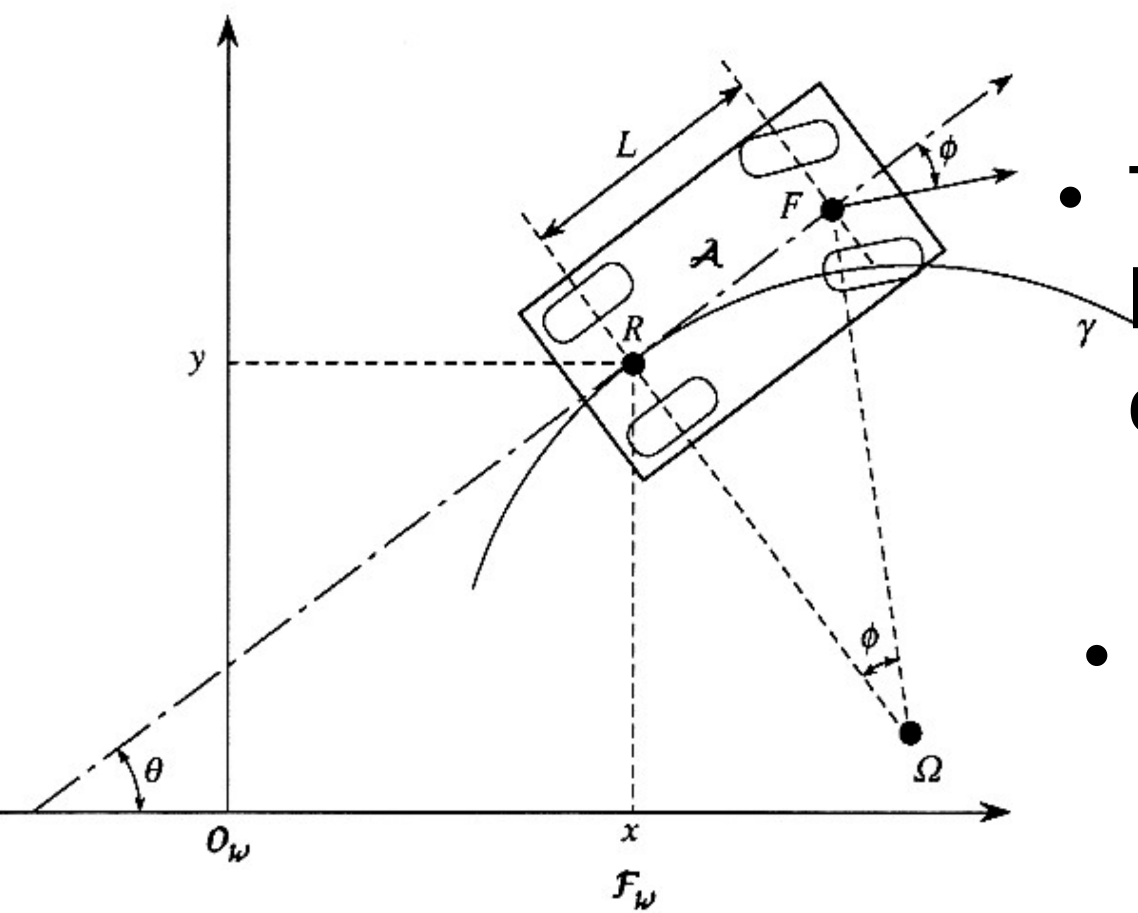
Articulated Robots cont.



- A sequence of postures for a planar 8-joint manipulator using the artificial potential fields approach.

Non-Holonomic Constraints

- Car-Robot ***A*** modeled as a rectangle.
- State of ***A*** described by 3 parameters $(x,y,\theta) \in R^2 \times [0,2\pi]$, with *modulo* 2π for angle θ.



- At every instant we have :

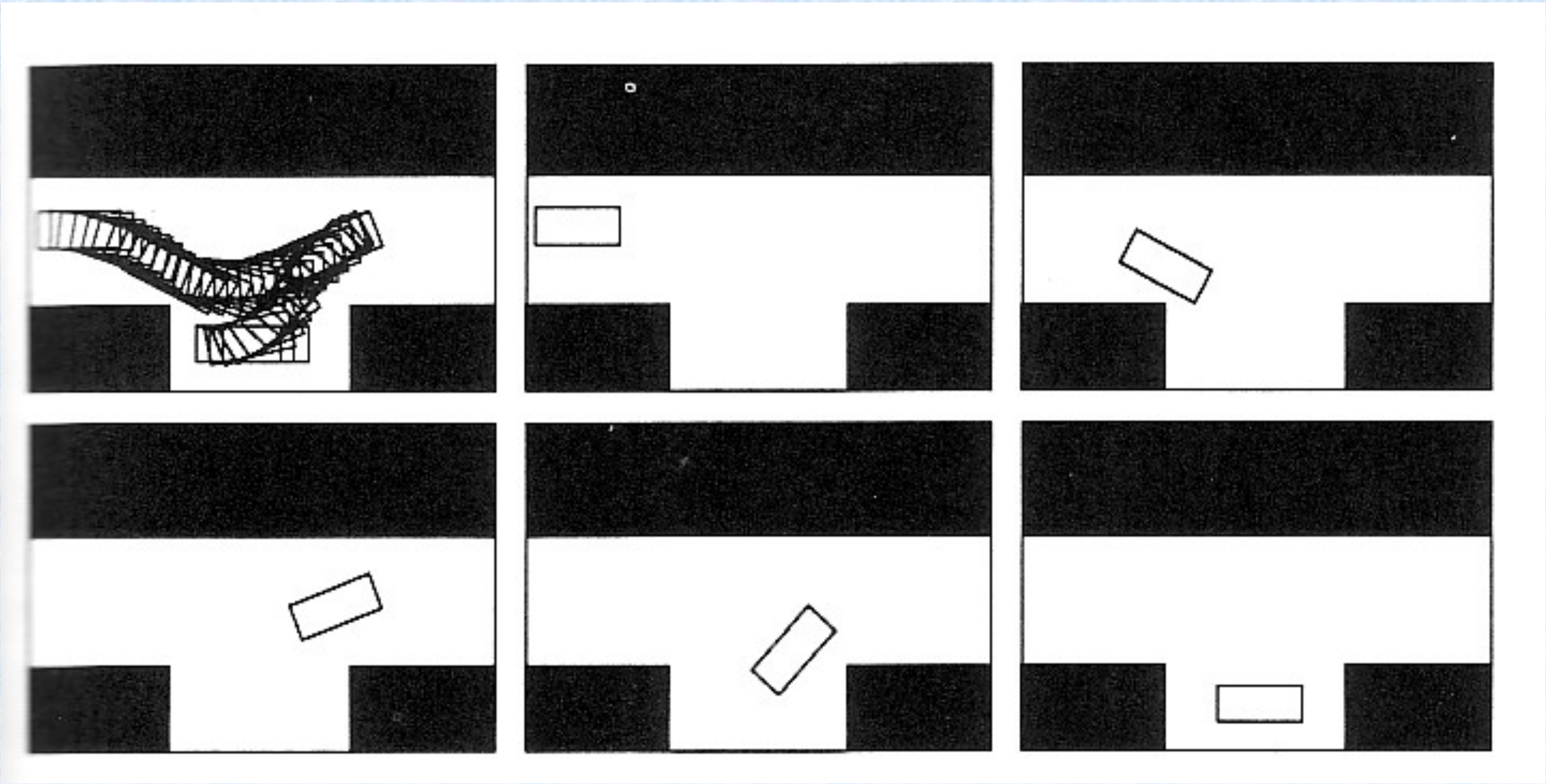
$$-\sin\theta \cdot dx + \cos\theta \cdot dy = 0$$

- This is a non holonomic equality constraint.

- In general, $|\varphi| \leqslant$.

$$\leqslant \varphi_{max} < \pi/2.$$

Non-Holonomic Constraints cont.



- Parallel parking for a nonholonomic car-robot.