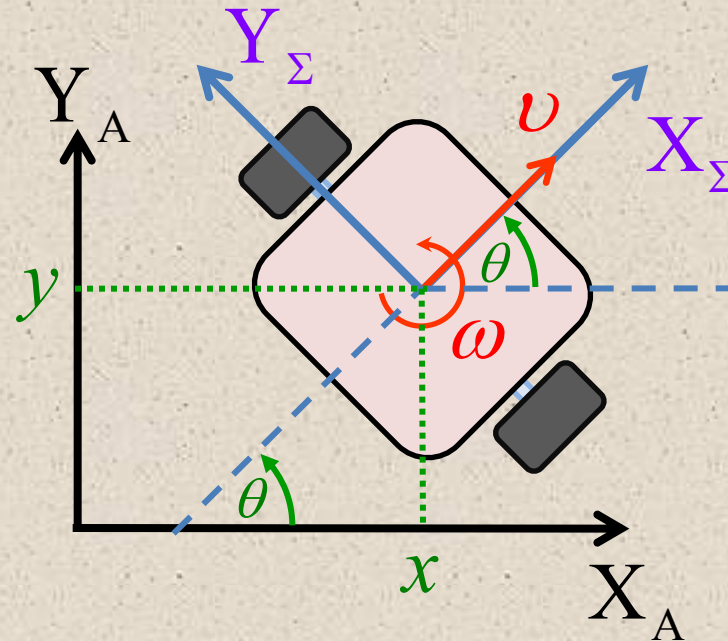


Κινηματική & Δυναμική των Τροχοφόρων Ρομπότ



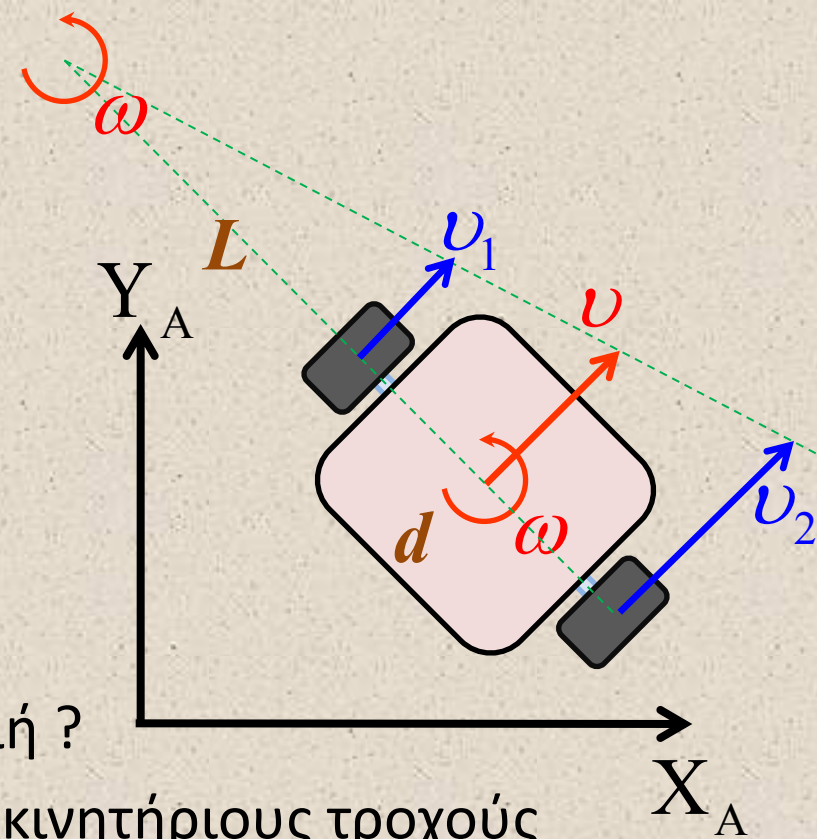
Κινηματική Ανάλυση

- Συστήματα Συντεταγμένων
 - Αδρανειακό (A) και
 - Σωματόδετο (Σ)
- Γραμμική Ταχύτητα v
- Περιστροφική Ταχύτητα ω



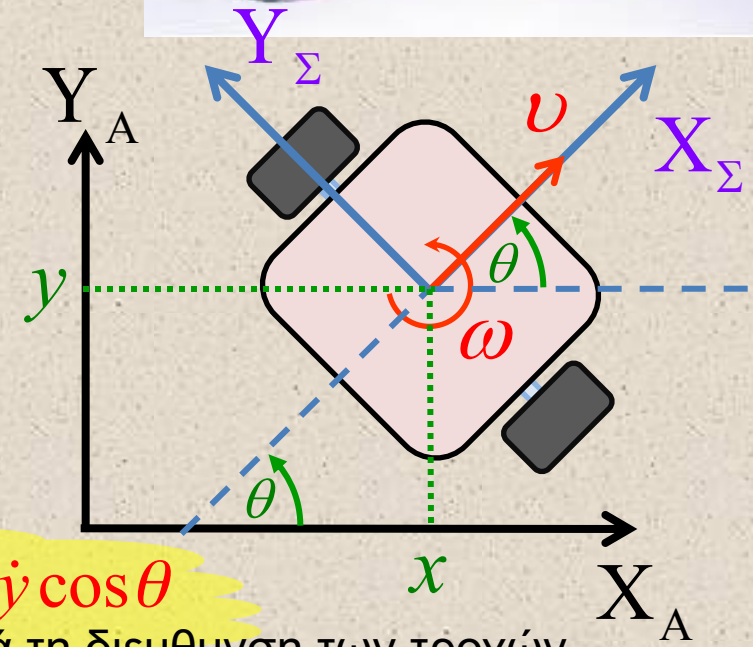
Κινηματική Ανάλυση

- Συστήματα Συντεταγμένων
 - Αδρανειακό (A) και
 - Σωματόδετο (Σ)
- Γραμμική Ταχύτητα v
- Περιστροφική Ταχύτητα ω
- Πως σχετίζονται με την κινηματική δομή ?
- **Παράδειγμα:** Τροχοφόρο ρομπότ με 2 κινητήριους τροχούς ίδιας ακτίνας r , που βρίσκονται σε απόσταση d :
 - Γραμμικές ταχύτητες τροχών: $v_1 = \omega_1 \cdot r$ $v_2 = \omega_2 \cdot r$
 - Με αναφορά στο στιγμιαίο κέντρο περιστροφής (L) και τη συνθήκη Ackermann



$$\left. \begin{array}{l} v_1 = \omega \cdot L \\ v_2 = \omega \cdot (L + d) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} v = r \cdot (\omega_2 + \omega_1) / 2 \\ \omega = r \cdot (\omega_2 - \omega_1) / d \\ L = d \cdot \omega_1 / (\omega_2 - \omega_1) \end{cases}$$

Κινηματική Ανάλυση



$$q = [x \quad y \quad \theta]^T$$

$$\dot{x} \sin \theta = \dot{y} \cos \theta$$

Κίνηση μόνο κατά τη διεύθυνση των τροχών

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \cdot \cos \theta \\ \dot{y} &= v \cdot \sin \theta \\ \dot{\theta} &= \omega \end{aligned}$$

$$\dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta = 0 \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} \sin \theta & -\cos \theta & 0 \end{bmatrix}}_{A^T(q)} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}}_{\dot{q}} = 0 \Rightarrow A^T(q) \cdot \dot{q} = 0$$

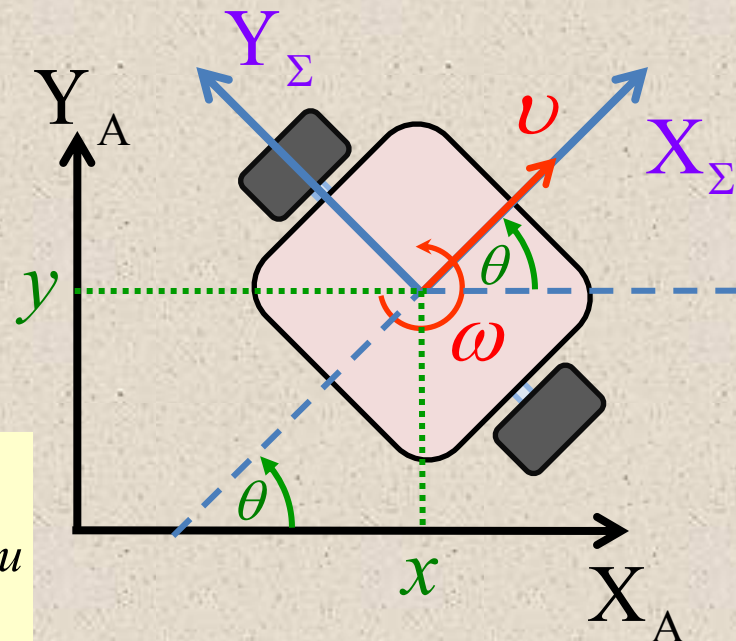
Κινηματική Ανάλυση

- Κινηματική σε μητρική μορφή

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v \cdot \cos \theta \\ \dot{y} &= v \cdot \sin \theta \\ \dot{\theta} &= \omega\end{aligned}$$



$$\dot{q} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = G(q) \cdot u$$



- Αυτή είναι μία σχέση ταχυτήτων (Ιακωβιανή).

- Τι μπορούμε να πούμε για τις θέσεις;

- Επίσης, παρατηρούμε ότι

$$\left. \begin{aligned} G(q) &= \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ A^T(q) &= \begin{bmatrix} \sin \theta & -\cos \theta & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow A^T(q) \cdot G(q) = 0$$

Δυναμική Ανάλυση

• Εξωτερικές Δυνάμεις και Ροπές στο σωματόδετο σ.σ. Σ : $\tau = [F_\Sigma \quad M_\Sigma]^T$

• Lagrangian $L = K - V$

$$K = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2, \quad V = 0$$

• Εξισώσεις Euler-Lagrange

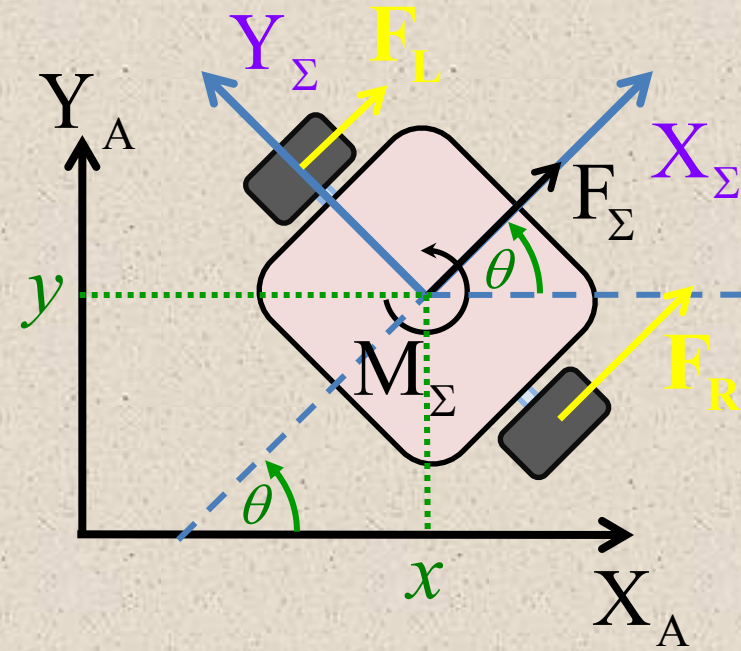
$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial L}{\partial q} = G(q) \cdot \tau + \lambda \cdot A(q)$$

Εξωτερικές
Δυνάμεις

Δυνάμεις που προκαλούν τον περιορισμό
 $\dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta = 0$ (Εσωτερικές), όπου όπως είδαμε:

$$\left. G(q) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \Rightarrow A^T(q) \cdot G(q) = 0$$

$$A^T(q) = [\sin \theta \quad -\cos \theta \quad 0]$$



Δυναμική Ανάλυση

•Εξισώσεις Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial L}{\partial q} = G(q) \cdot \tau + \lambda \cdot A(q)$$

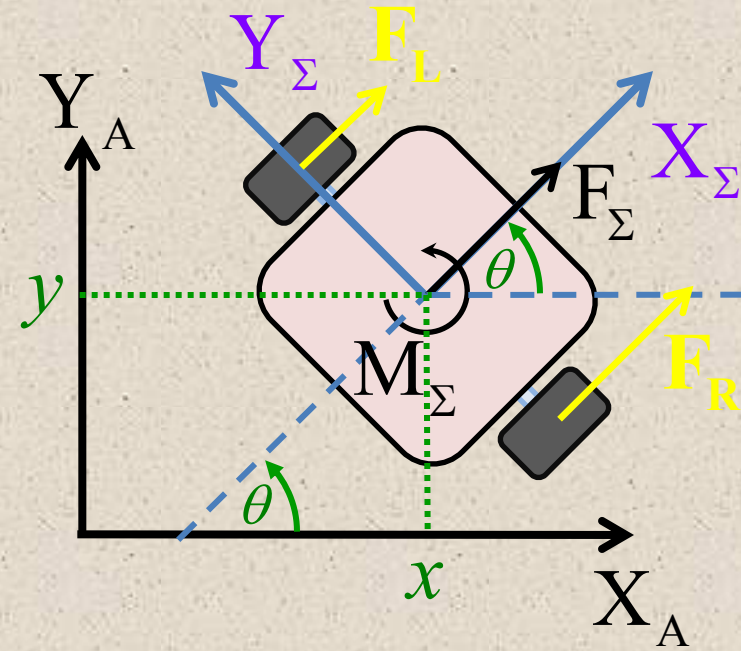
$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \begin{bmatrix} m\dot{x} & m\dot{y} & I\dot{\theta} \end{bmatrix}^T \Rightarrow \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right] = \begin{bmatrix} m\ddot{x} & m\ddot{y} & I\ddot{\theta} \end{bmatrix}^T$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$G(q) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow G(q) \cdot \tau = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_{\Sigma} \\ M_{\Sigma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{\Sigma} \cdot \cos \theta \\ F_{\Sigma} \cdot \sin \theta \\ M_{\Sigma} \end{bmatrix}$$

$$A^T(q) = \begin{bmatrix} \sin \theta & -\cos \theta & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda \cdot A(q) = \begin{bmatrix} \lambda \cdot \sin \theta \\ -\lambda \cdot \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix}$$



Δυναμική Ανάλυση

- Εξισώσεις Euler-Lagrange

$$m\ddot{x} = F_{\Sigma} \cos \theta + \lambda \sin \theta$$

$$m\ddot{y} = F_{\Sigma} \sin \theta - \lambda \cos \theta$$

$$I\ddot{\theta} = M_{\Sigma}$$

- Απαλείφοντας τον παράγοντα λ

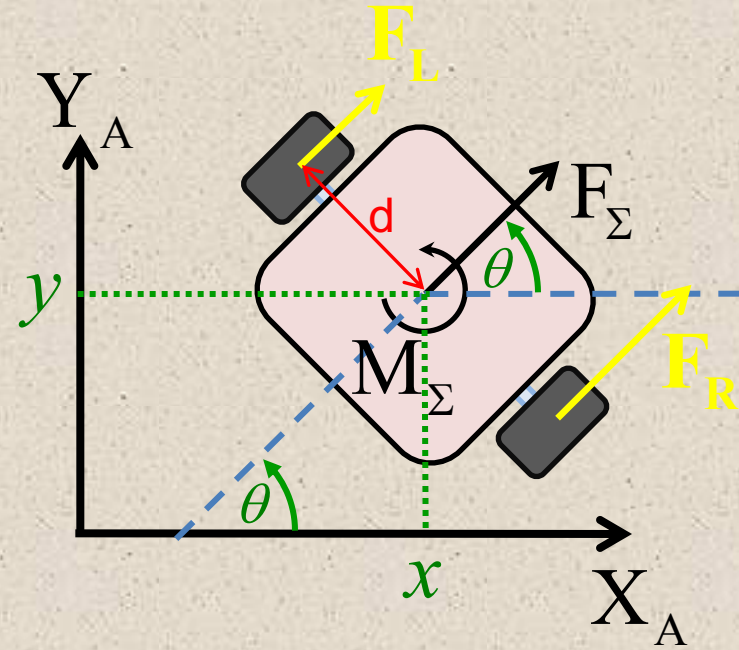
$$m(\ddot{x} \cos \theta + \ddot{y} \sin \theta) = F_{\Sigma}$$

όπου $\ddot{x} \cos \theta + \ddot{y} \sin \theta = \dot{v}$ $\Leftarrow \begin{cases} \dot{x} = v \cdot \cos \theta \Rightarrow \ddot{x} = \dot{v} \cdot \cos \theta - v \cdot \sin \theta \cdot \omega \\ \dot{y} = v \cdot \sin \theta \Rightarrow \ddot{y} = \dot{v} \cdot \sin \theta + v \cdot \cos \theta \cdot \omega \end{cases}$

- Άρα οι Euler-Lagrange ισοδυναμούν με τις εξισώσεις Newton-Euler

$$m\dot{v} = F_{\Sigma}$$

$$I\dot{\omega} = M_{\Sigma}$$



$$F_{\Sigma} = F_R + F_L$$

$$M_{\Sigma} = (F_R - F_L) \cdot d$$