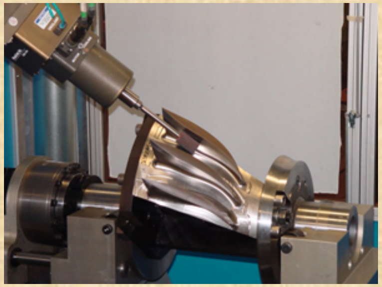
Έλεγχος Αλληλεπίδρασης με το Περιβάλλον

- Έλεγχος «Συμμόρφωσης» ή «Υποχωρητικότητας» (Compliance Control)
- Έλεγχος Εμπέδησης (Impedance Control)

Αλληλεπίδραση με το περιβάλλον

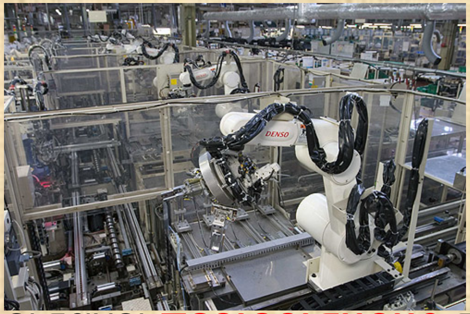
- Η αλληλεπίδραση με το περιβάλλον είναι ουσιαστικότατης σημασίας για την χρηστικότητα ενός ρομποτικού βραχίονα

  - Λείανση – deburring



  - Κατεργασίες

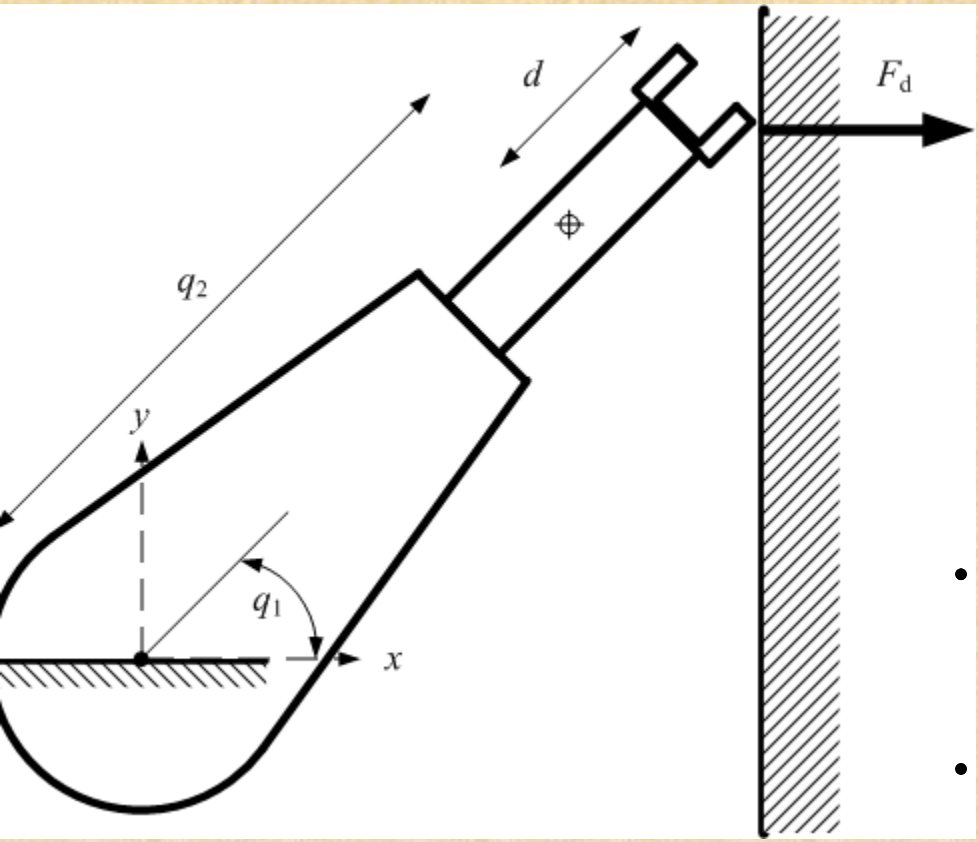
  - Συναρμολόγιση



- Η αλληλεπίδραση εισαγει **περιορισμους** στη γεωμετρία της κίνησης του ρομπότ.

Αλληλεπίδραση με το περιβάλλον

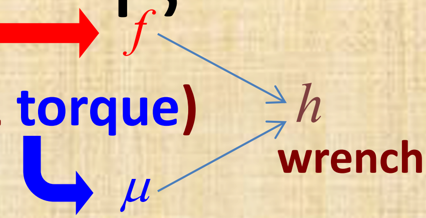
- Αν θέλαμε να αντιμετωπίσουμε τα προβλήματα κίνησης με καθορισμένη γεωμετρία μόνο μέσω νόμων ελέγχου κίνησης τότε θα απαιτείτο μεγάλη (πρακτικά, σχεδόν αδύνατη) **ακρίβεια στο προγραμματισμό και έλεγχο κίνησης (motion planning & control)**...



- Στην αντιθετη περίπτωση, είναι δυνατόν να αναπτυχθούν **μεγάλες δυνάμεις αλληλεπίδρασης** του βραχίονα με το περιβάλλον που είναι δυνατόν να οδηγήσουν σε καταστροφή
  - του βραχίονα, ή
  - κάποιου εργαλείου ή και
  - αυτού καθ' εαυτού του προς κατεργασία αντικειμένου.

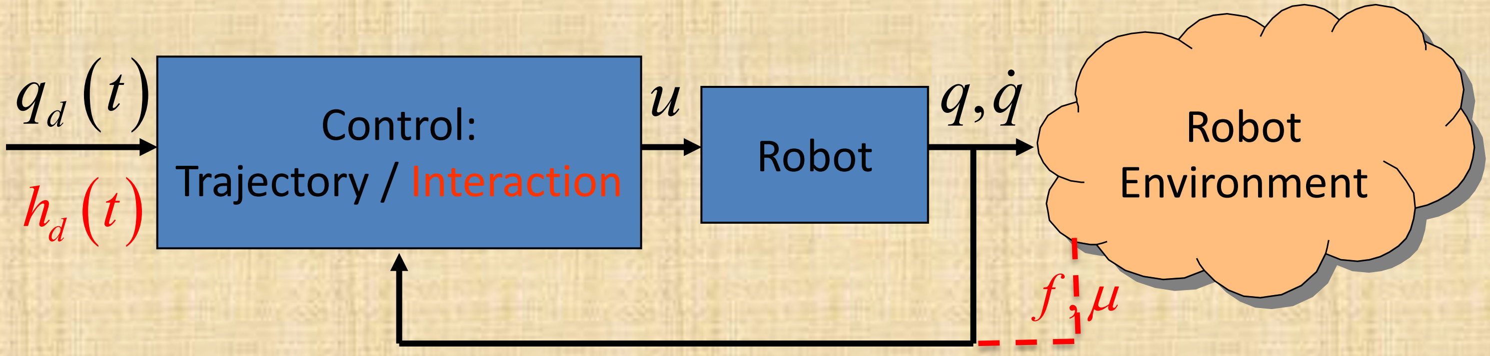
- Επομένως οι νόμοι ελέγχου κίνησης πρέπει να επεκταθούν ώστε να ληφθούν υπόψι οι περιορισμοί κίνησης που εισάγει η «**αλληλεπίδραση με το περιβάλλον**».
- Έτσι προκύπτει ο **Έλεγχος Αλληλεπίδρασης**.

Νόμοι Ελέγχου Αλληλεπίδρασης



- Ο συνδιασμός **δύναμης & ροπής επαφής (contact force & torque)** καθορίζει πλήρως την αλληλεπίδραση με το περιβάλλον.
- Οι **νόμοι ελέγχου αλληλεπίδρασης (interaction control)** χωρίζονται σε δύο (2) κατηγορίες ανάλογα με το πως επιτυγχάνεται ο έλεγχος δύναμης:
  - **Έμμεσος Έλεγχος Δύναμης (indirect force control)**: μέσω ελέγχου κίνησης (χωρίς μέτρηση δύναμης). Σε αυτή τη κατηγορία ανήκουν οι μεθοδολογίες ελέγχου:
    - «Συμμόρφωσης» ή «Υποχωρητικότητας» (Compliance Control)
    - **Εμπέδησης (Impedance Control)**
  - **Άμεσος Έλεγχος Δύναμης (direct force control)** : άμεσα με βρόχο ελέγχου της δύναμης. Σε αυτή τη κατηγορία ανήκουν οι μεθοδολογίες:
    - Ελέγχου Δύναμης (Force Control)
    - Υβριδικού Ελέγχου Δύναμης & Θέσης (Hybrid Force / Motion Control)

Έλεγχος Αλληλεπίδρασης με το Περιβάλλον



1. 1. Έλεγχος «Συμμόρφωσης» ή «Υποχωρητικότητας» (Compliance Control)

- Euler-Lagrange μοντέλο ενός βραχίονα

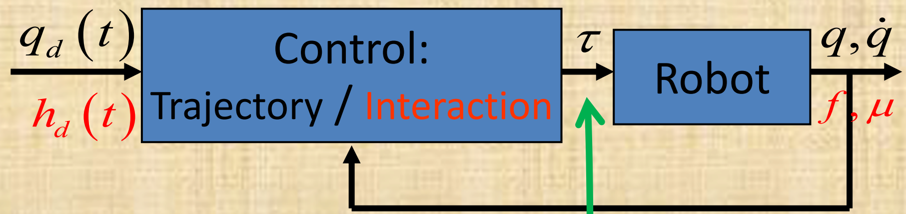
$$B(q)\cdot\ddot{q}+C(q,\dot{q})\cdot\dot{q}+F_u\cdot\dot{q}+G(q)=\tau-J^T(q)\cdot h$$

  - $J(q)\in\Re^{6\times n}$: η <u>γεωμετρική</u> Ιακωβιανή του βραχίονα που έχει προκύψει από τη διαφορική κινηματική ανάλυση
  - $h=\begin{bmatrix} f^T & \mu^T \end{bmatrix}^T\in\Re^6$: το σύνθετο διάνυσμα των δυνάμεων $\left(f\in\Re^3\right)$ και ροπών $\left(\mu\in\Re^3\right)$ που ασκούνται από τον βραχίονα προς στο περιβάλλον

1. 1. Έλεγχος «Συμμόρφωσης» ή «Υποχωρητικότητας» (Compliance Control):

Ανάλυση από πλευράς <u>Βραχίονα</u>

- Θεωρούμε νόμο ελέγχου :



  - θέσης, τύπου PD
  - με πρόσω τροφοδότηση των βαρυτικών όρων,
  - εκφρασμένο στο **λειτουργικό χώρο** (operational space)

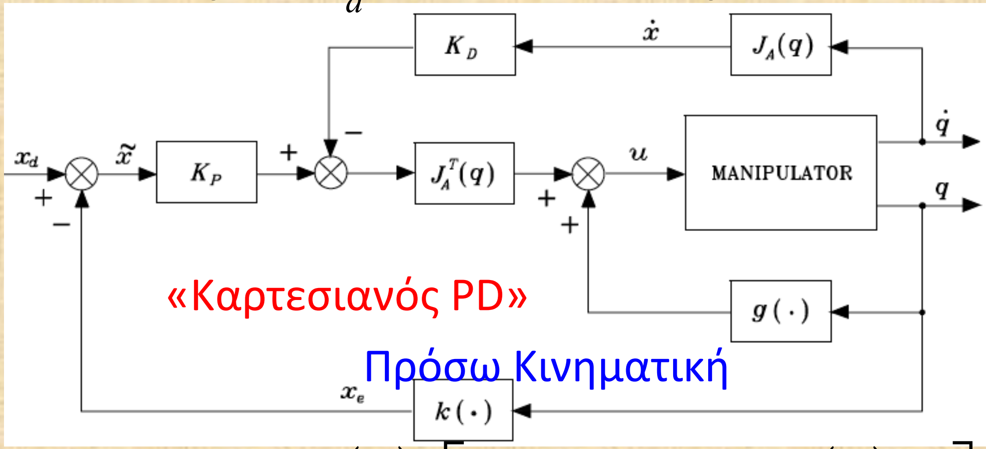
$$\tau = G(q) + J_A^T(q) \cdot \left[K_p \cdot \tilde{x} + K_d \cdot \dot{\tilde{x}} \right]$$

- $J_A(q) \in \Re^{6\times n}$: η <u>αναλυτική</u> Ιακωβιανή του βραχίονα
- $\tilde{x} \triangleq x_d - x$: σφάλμα μεταξύ
  - x_d του επιθυμητού σύνθετου διανύσματος θέσης & προσανατολισμού του βραχίονα, και
  - x του πραγματικού σύνθετου διανύσματος θέσης & προσανατολισμού του βραχίονα

Παρατηρείστε & θυμηθείτε την διαφορά μεταξύ Γεωμετρικής & Αναλυτικής Ιακωβιανής

1. 1. Έλεγχος «Συμμόρφωσης» ή «Υποχωρητικότητας» (Compliance Control): Ανάλυση από πλευράς Βραχίονα

- Για **σταθερό** επιθυμητό σύνθετο διάνυσμα ($x_d = const$) θέσης & προσανατολισμού



$$\tilde{x} \triangleq x_d - x \Rightarrow \dot{\tilde{x}} \triangleq \overset{0}{\dot{x}_d} - \dot{x}$$

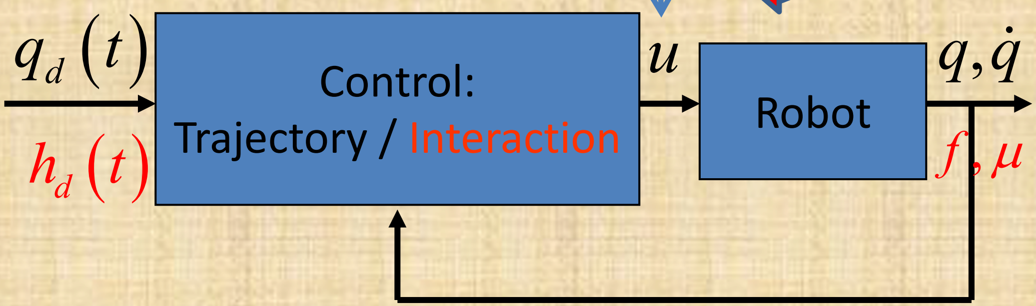
$$\Rightarrow \dot{\tilde{x}} = -\dot{x} = -J_A(q)\cdot\dot{q}$$

$$\tau = G(q) + J_A^T(q)\cdot\left[K_p\cdot\tilde{x} + K_d\cdot\dot{\tilde{x}}\right] \Rightarrow \tau = G(q) + J_A^T(q)\cdot\left[K_p\cdot\tilde{x} - K_d\cdot J_A(q)\cdot\dot{q}\right]$$

$$B(q)\cdot\ddot{q} + C(q,\dot{q})\cdot\dot{q} + F_u\cdot\dot{q} + G(q) = \tau - J^T(q)\cdot h$$

$$B(q)\cdot\ddot{q} + C(q,\dot{q})\cdot\dot{q} + F_u\cdot\dot{q} = J_A^T(q)\cdot\left[K_p\cdot\tilde{x} - K_d\cdot J_A(q)\cdot\dot{q}\right] - J^T(q)\cdot h$$

Σύστημα Κλειστού Βρόχου



1. 1. Έλεγχος «Συμμόρφωσης» ή «Υποχωρητικότητας» (Compliance Control): Ανάλυση από πλευράς Βραχίονα

- Όταν με τον νόμο ελέγχου $\tau = G(q) + J_A^T(q)\cdot\left[K_p\cdot\tilde{x} + K_d\cdot\dot{\tilde{x}}\right]$ το σύστημα κλειστού βρόχου τείνει σε ισορροπία, τότε $q \rightarrow q_\infty \quad \dot{q} \rightarrow 0 \quad \ddot{q} \rightarrow 0 \quad x \rightarrow x_\infty$
- Οπότε αν $\tilde{x}_\infty = x_d - x_\infty$

$$B(q_\infty)\cdot\underset{0}{\ddot{q}} + C(q_\infty,\dot{q})\cdot\underset{0}{\dot{q}} + F_u\cdot\underset{0}{\dot{q}} = J_A^T(q_\infty)\cdot\left[K_p\cdot\tilde{x}_\infty - K_d\cdot J_A(q_\infty)\cdot\underset{0}{\dot{q}}\right] - J^T(q_\infty)\cdot h$$

και τότε

$$0 = J_A^T(q_\infty)\cdot K_p\cdot\tilde{x}_\infty - J^T(q_\infty)\cdot h \Rightarrow \tilde{x}_\infty = K_p^{-1}\cdot J_A^{-T}(q_\infty)\cdot J^T(q_\infty)\cdot h = K_p^{-1}\cdot T_A^T(x_\infty)\cdot h$$

δηλαδή $\tilde{x}_\infty = K_p^{-1}\cdot h_A$ όπου $h_A \triangleq T_A^T(x)\cdot h, \qquad T_A(x_\infty) = J(q_\infty)\cdot J_A^{-1}(q_\infty)$

Σφάλμα Μόνιμης Κατάστασης

???

1. 1. Έλεγχος «Συμμόρφωσης» ή «Υποχωρητικότητας» (Compliance Control): Ανάλυση από πλευράς <u>Βραχίονα</u>

– Η $\tilde{x}_\infty = K_p^{-1} \cdot h_A$

δείχνει ότι η θέση ισορροπίας του βραχίονα υπό το νόμο ελέγχου

$$\tau = G(q) + J_A^T(q) \cdot \left[K_p \cdot \tilde{x} + K_d \cdot \dot{\tilde{x}} \right]$$

βρίσκεται σε σχέση ελαστικότητας με «συντελεστή συμμόρφωσης» (compliance) K_p^{-1}

ως προς την «επενέργηση» h_A, που δίνεται από την $h_A \triangleq T_A^T(x) \cdot h$

– Οι σχέσεις $h_A \triangleq T_A^T(x) \cdot h$ και $T_A(x) = J(q_\infty) \cdot J_A^{-1}(q_\infty) = \begin{bmatrix} I_{3\times3} & 0_{3\times3} \\ 0_{3\times3} & T(\phi) \end{bmatrix}$

– δείχνουν ότι οι συνιστώσες

- της δύναμης επιδρούν γραμμικά στη θέση ισορροπίας, ενώ
- της ροπής επιδρούν στη θέση ισορροπίας με εξάρτηση μόνο από τον προσανατολισμό του ακροδέκτη.

1. 1. Έλεγχος «Συμμόρφωσης» ή «Υποχωρητικότητας» (Compliance Control): Ανάλυση από πλευράς Βραχίονα

– Προηγουμένως είχαμε καταλήξει στην $0 = J_A^T\left(q_\infty\right)\cdot K_p \cdot \tilde{x}_\infty - J^T(q_\infty)\cdot h$ δηλαδή $J_A^T\left(q\right)\cdot K_p \cdot \tilde{x}_\infty = J^T(q)\cdot h$

– που δείχνει ότι **αν** $h \in \mathcal{N}\left(J^T\right)$,

– άν δηλαδή το σύνθετο διάνυσμα των δυνάμεων και ροπών ανήκει στον ορθογώνιο χώρο του χώρου των στηλών του J^T (null space), πράγμα που σημαίνει ότι

$$J^T(q)\cdot h = 0$$

– **τότε** $\tilde{x}_\infty = 0$ ακόμα και για $h \neq 0$ (η αναλυτική Ιακωβιανή ειναι αντιστρέψιμη).

– Δηλαδή σε αυτή τη περίπτωση οι «δυνάμεις» παραλαμβάνονται από την κατασκευή του βραχίονα και όχι από τους επενεργητές των αρθρώσεων.

1.1. Έλεγχος «Συμμόρφωσης» ή «Υποχωρητικότητας» (Compliance Control): Ανάλυση από πλευράς Περιβάλλοντος

- Αναφορικά με τη σχέση «δυνάμεων» (μεταξύ βραχίονα και περιβάλλοντος) και αντίστοιχων παραμορφώσεων (... του περιβάλλοντος επειδή ο βραχίονας λαμβάνεται ως απόλυτα στερεό) στο σημείο επαφής, λαμβάνουμε προσεγγιστικά μέσω ενός μοντέλου ελαστικότητας

$$h = \begin{bmatrix} f \\ \mu \end{bmatrix} = K \cdot \begin{bmatrix} \delta p \\ \omega \cdot \delta t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_f & 0_{3\times3} \\ 0_{3\times3} & K_\mu \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta p \\ \omega \cdot \delta t \end{bmatrix}$$

όπου

  - K : ο «πίνακας δυσκαμψίας» (Stiffness Matrix), $K \geq 0$ επειδή το περιβάλλον δεν αντιδρά σε εκείνες τις κατευθύνσεις που η κίνηση δεν υπόκειται σε περιορισμούς, και
  - το διάνυσμα $\begin{bmatrix} \delta p^T & \omega^T \cdot \delta t \end{bmatrix}^T$ δείχνει τη γενικευμένη μετατόπιση ως προς το σύστημα συντεταγμένων βάσης.

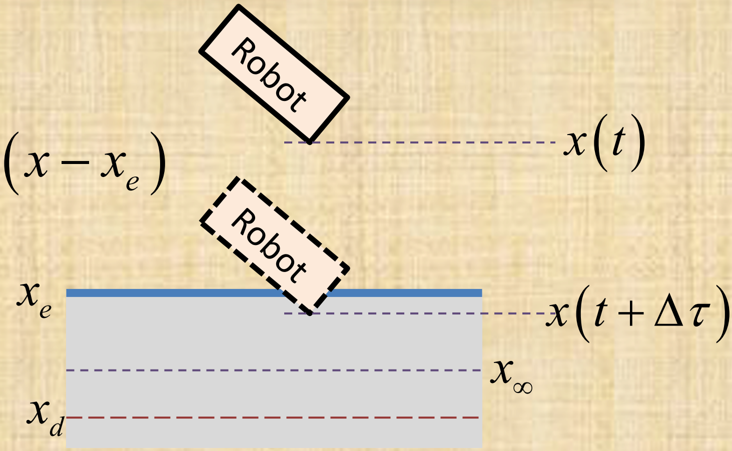
- Προφανώς

$$\upsilon = T_A(\phi) \cdot \dot{x}$$

$$\begin{bmatrix} \delta p \\ \omega \cdot \delta t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{p} \cdot \delta t \\ \omega \cdot \delta t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \omega \end{bmatrix} \cdot \delta t = \upsilon \cdot \delta t = T_A(\phi) \cdot \dot{x} \cdot \delta t = T_A(\phi) \cdot \delta x$$

1.1. Έλεγχος «Συμμόρφωσης» ή «Υποχωρητικότητας» (Compliance Control): Ανάλυση από πλευράς Περιβάλλοντος

$$\left.\begin{aligned} h &= K\cdot\begin{bmatrix}\delta p\\ \omega\cdot\delta t\end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix}\delta p\\ \omega\cdot\delta t\end{bmatrix} &= T_A(\phi)\cdot\delta x \end{aligned}\right\}\Rightarrow h = K\cdot T_A(\phi)\cdot\delta x = K\cdot T_A(\phi)\cdot(x-x_e)$$



- Παρατηρήστε ότι ... έχουμε πολλά «x»:
  - x είναι η τρέχουσα «θέση»,
  - x_e είναι η αρχική, απαραμόρφωτη, «θέση»,
  - x_d είναι η επιθυμητή «θέση», και
  - x_∞ είναι η τελική «θέση» ή «θέση» ισορροπίας.
- Επειδή $h_A \triangleq T_A^T(x)\cdot h \Rightarrow h_A = \underbrace{T_A^T(x)\cdot K\cdot T_A(x)}_{K_A(x)}\cdot\delta x \Rightarrow \boxed{h_A = K_A(x)\cdot(x-x_e)}$
- $K_A(x)$: ο *παθητικός πίνακας συμμόρφωσης (passive compliance matrix),* οφείλεται στο περιβάλλον, και $K_A(x)\geq 0$ δηλ. έχει νόημα σε εκείνες τις κατευθύνσεις που η κίνηση δεν υπόκειται σε περιορισμούς.
- Στην έκφραση $\tilde{x}_\infty = K_p^{-1}\cdot h_A$ ο πίνακας αντιπροσωπεύει την *ενεργητική συμμορφωση*.

1.1. Έλεγχος «Συμμόρφωσης» ή «Υποχωρητικότητας» (Compliance Control): Ανάλυση από πλευράς Περιβάλλοντος

- Από προηγουμένως

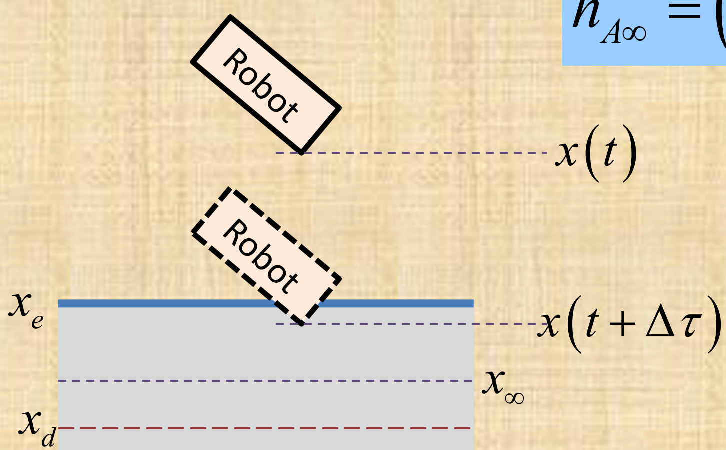
$$\left.\begin{aligned} \tilde{x}_{\infty} &= x_d - x_{\infty} \\ \tilde{x}_{\infty} &= K_p^{-1} \cdot h_A\left(x_{\infty}\right) \\ h_A\left(x_{\infty}\right) &= K_A\left(x_{\infty}\right) \cdot \left(x_{\infty} - x_e\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_d - x_{\infty} = K_p^{-1} \cdot \overbrace{K_A\left(x_{\infty}\right)}^{T_A^T(x) \cdot K \cdot T_A(x)} \cdot \left(x_{\infty} - x_e\right)$$

Επομένως

$$x_{\infty} = \left(I + K_p^{-1} \cdot K_A\left(x_{\infty}\right)\right)^{-1} \cdot \left(x_d + K_p^{-1} \cdot K_A\left(x_{\infty}\right) \cdot x_e\right)$$

και

$$h_{A\infty} = \left(I + K_p^{-1} \cdot K_A\left(x_{\infty}\right)\right)^{-1} \cdot K_A\left(x_{\infty}\right) \cdot \left(x_d - x_e\right)$$



1.2. Έλεγχος Εμπέδησης (Impedance Control)

- Στο παρελθόν έχει παρουσιασθεί (για τον έλεγχο θέσης) ο νόμος ελέγχου αντίστροφης δυναμικής (μεθοδολογία υπολογιζόμενης ροπής – computed torque technique)

$$\left.\begin{array}{c} \boldsymbol{\tau} = B(q)\cdot\left[\ddot{q}_d + K_v\cdot(\dot{q}_d - \dot{q}) + K_p\cdot(q_d - q)\right] + C(q,\dot{q})\cdot\dot{q} + F_u\cdot\dot{q} + G(q) \\ B(q)\cdot\ddot{q} + C(q,\dot{q})\cdot\dot{q} + F_u\cdot\dot{q} + G(q) = \boldsymbol{\tau} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{c} B(q)\cdot\left[(\ddot{q}_d - \ddot{q}) + K_v\cdot(\dot{q}_d - \dot{q}) + K_p\cdot(q_d - q)\right] = 0 \\ B(q) > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} B(q)\cdot\left[\ddot{e} + K_v\cdot\dot{e} + K_p\cdot e\right] = 0 \\ e \triangleq q_d - q \end{array}\right\}$$

- Από όπου συνέγεται ότι $e \to 0$, για κατάλληλη επιλογή των $\boldsymbol{K_v}, \boldsymbol{K_p}$.
- Αν εφαρμόσουμε στο βραχίονα ένα νόμο ελέγχου αντίστροφης δυναμικής στο λειτουργικό χώρο (operational space) για τη **περίπτωση αλληλεπίδρασης**

$$\left.\begin{array}{c} B(q)\cdot\ddot{q} + C(q,\dot{q})\cdot\dot{q} + F_u\cdot\dot{q} + G(q) + J^T(q)\cdot h = \boldsymbol{\tau} \\ \boldsymbol{\tau} = B(q)\cdot y + C(q,\dot{q})\cdot\dot{q} + F_u\cdot\dot{q} + G(q) \end{array}\right\} \Rightarrow \ddot{q} = y - B^{-1}(q)\cdot J^T(q)\cdot h$$

1.2. Έλεγχος Εμπέδησης (Impedance Control)

- Αν $\tilde{x} = x_d - x$ και επειδή $\dot{x} = J_A(q)\cdot\dot{q} \Rightarrow \ddot{x} = J_A(q)\cdot\ddot{q} + \dot{J}_A(q)\cdot\dot{q}$

  αν στην $\ddot{q} = y - B^{-1}(q)\cdot J^T(q)\cdot h$

  επιλέξουμε $y = J_A^{-1}(q)\cdot M_d^{-1}\cdot\left(M_d\cdot\ddot{x}_d + K_D\cdot\dot{\tilde{x}} + K_P\cdot\tilde{x} - M_d\cdot\dot{J}_A(q,\dot{q})\cdot\dot{q}\right)$

  τότε $M_d\cdot\ddot{\tilde{x}} + K_D\cdot\dot{\tilde{x}} + K_P\cdot\tilde{x} = M_d\cdot B_A^{-1}(q)\cdot h_A$

  όπου $B_A(q) = J_A^{-T}(q)\cdot B(q)\cdot J_A^{-1}(q)$ είναι το ισοδύναμο του πίνακα αδράνειας στο λειτουργικό χώρο ($B_A(q)\geq 0$ αν $|J_A|\neq 0$).

- Αυτή η μεθοδολογία υλοποιεί μία «*μηχανική εμπέδηση*» μεταξύ
  - των επενεργουσών «δυνάμεων» $M_d B_A^{-1}(q) h_A$ και
  - της μετατόπισης $\tilde{x} = x_d - x$

  στο λειτουργικό (καρτεσιανό) χώρο.

- Αυτή η εμπέδηση εξαρτάται από τους πίνακες μάζας, απόσβεσης και ελαστικότητας (M_d, K_D, K_P).

1.2. Έλεγχος Εμπέδησης (Impedance Control)

- Στον προηγούμενο νόμο ελέγχου

$$\tau = B(q)\cdot J_A^{-1}(q)\cdot M_d^{-1}\cdot\left[M_d\cdot\ddot{x}_d + K_D\cdot\dot{\tilde{x}} + K_P\cdot\tilde{x} - M_d\cdot\dot{J}_A(q,\dot{q})\cdot\dot{q}\right] +$$
$$+ C(q,\dot{q})\cdot\dot{q} + F\cdot\dot{q} + G(q)$$

που καταλήγει στο σύστημα κλειστου βρόχου

$$M_d\cdot\ddot{\tilde{x}} + K_D\cdot\dot{\tilde{x}} + K_P\cdot\tilde{x} = M_d\cdot B_A^{-1}(q)\cdot h_A$$

η ύπαρξη του $B_A^{-1}(q)$ εισάγει εξάρτηση από την θέση του βραχίονα.

- Αν όμως επιλέξουμε το σχήμα ελέγχου

$$\tau = B(q)\cdot y + C(q,\dot{q})\cdot\dot{q} + F\cdot\dot{q} + G(q) + J^T(q)\cdot h$$

με

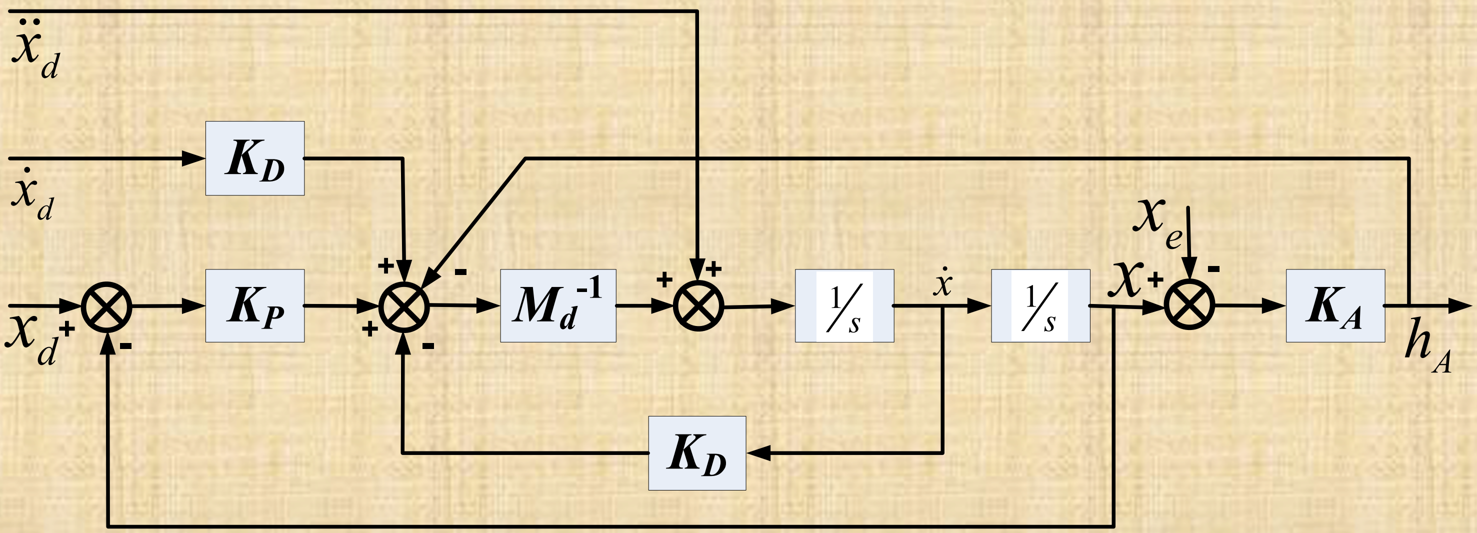
$$y = J_A^{-1}(q)\cdot M_d^{-1}\cdot\left(M_d\cdot\ddot{x}_d + K_D\cdot\dot{\tilde{x}} + K_P\cdot\tilde{x} - M_d\cdot\dot{J}_A(q,\dot{q})\cdot\dot{q} - h_A\right)$$

τότε η δυναμική κλειστού βρόχου γίνεται

$$M_d\cdot\ddot{\tilde{x}} + K_D\cdot\dot{\tilde{x}} + K_P\cdot\tilde{x} = h_A$$

1.2. Έλεγχος Εμπέδησης (Impedance Control)

- Η δυναμική κλειστού βρόχου $M_d \cdot \ddot{\tilde{x}} + K_D \cdot \dot{\tilde{x}} + K_P \cdot \tilde{x} = h_A$ δείχνει τη γραμμική εμπέδηση σε σχέση με τις δυνάμεις h_A.



- Αυτό το σχήμα ελέγχου απαιτεί απευθείας μέτρηση των δυνάμεων & ροπών, πράγμα που απαιτεί την χρήση κατάλληλου αισθητήρα δυνάμεων/ροπών στον ακροδέκτη.
- Η παραπάνω σχέση καθορίζει το σημείο ισορροπίας κατά τρόπο ανάλογο με προηγουμένως και κατά συνέπεια μπορεί να ακολουθήσουμε παρόμοια ανάλυση με αυτή της προηγούμενης παραγράφου. Είναι προφανές ότι κατάλληλη επιλογή των M_d, K_D, K_P οδηγεί σε επιθυμητή απόκριση.
-

Σχέσεις από τη Διαφορική Κινηματική

- Αν ω η γωνιακή ταχύτητα του ακροδέκτη, δηλ. του συστήματος συντεταγμένων του ακροδέκτη (**εκφρασμένη στο σύστημα συντεταγμένων της βάσης**), τότε

$$\upsilon \triangleq \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \omega \end{bmatrix} = J(q) \cdot \dot{q}$$

Η ω έχει «φυσική» σημασία, <u>όχι όμως </u>και το ολοκλήρωμά της ως προς τον χρόνο.

- Αν $\dot{\phi}$ η παράγωγος του διανύσματος προσανατολισμού Euler ϕ (**εκφρασμένη στο σύστημα συντεταγμένων του ακροδέκτη**), τότε

$$\dot{x} \triangleq \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = J_A(q) \cdot \dot{q}$$

Η $\dot{\phi}$ δεν έχει φυσική σημασία, όμως το χρονικό ολοκλήρωμα της ϕ δίνει τον προσανατολισμό .

- Επειδή $\omega = T(\phi) \cdot \dot{\phi} \Rightarrow \upsilon = \underbrace{\begin{bmatrix} I_{3\times3} & 0_{3\times3} \\ 0_{3\times3} & T(\phi) \end{bmatrix}}_{T_A(x)} \cdot \dot{x} \Rightarrow \upsilon = T_A(\phi) \cdot \dot{x}$

όπου $T(\phi)$ είναι πίνακας περιστροφής.

Σχέσεις από τη Διαφορική Κινηματική

- Αν η Αναλυτική Ιακωβιανή είναι αντιστρέψιμη

$$\left.\begin{array}{r} \upsilon \triangleq \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \omega \end{bmatrix} = J(q)\cdot\dot{q} \\ \dot{x} \triangleq \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = J_A(q)\cdot\dot{q} \Rightarrow \dot{q} = J_A^{-1}(q)\cdot\dot{x} \end{array}\right\} \Rightarrow \upsilon = J(q)\cdot J_A^{-1}(q)\cdot\dot{x}$$

Επειδή από προηγουμένως έχουμε $\upsilon = T_A(\phi)\cdot\dot{x}$

Ισχύει:

$$T_A(x) = J(q)\cdot J_A^{-1}(q) = \begin{bmatrix} I_{3\times 3} & 0_{3\times 3} \\ 0_{3\times 3} & T(\phi) \end{bmatrix}$$