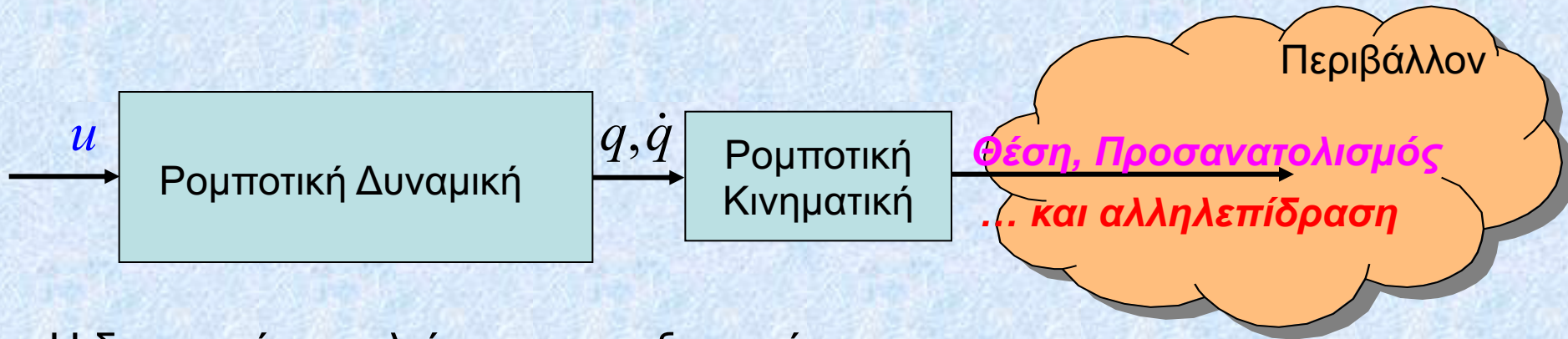


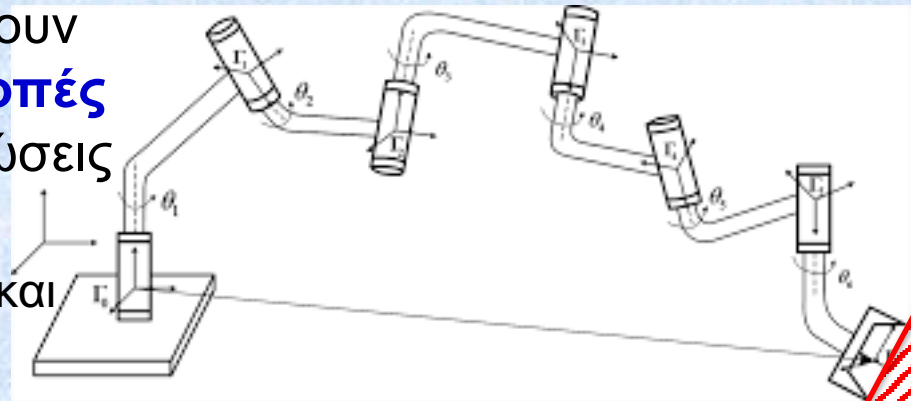
Δυναμική των Ρομπωτικών Βραχιόνων

Κ. Κυριακόπουλος

Ρομποτική Αρχιτεκτονική: η Δυναμική

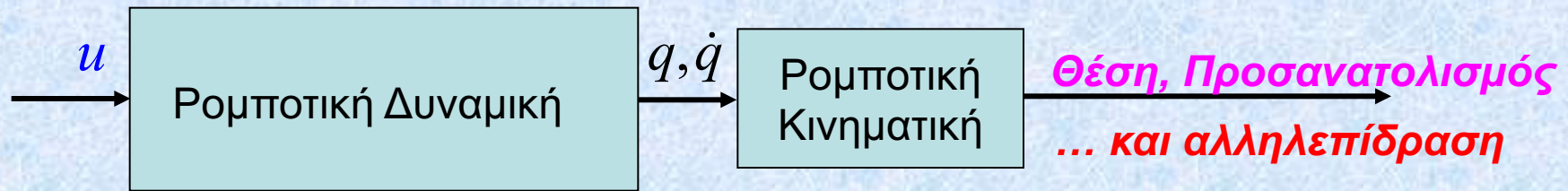


- Η δυναμική ασχολείται με την εξαγωγή και τη μελέτη του δυναμικού μοντέλου ενός ρομποτικού βραχίονα.
- Το δυναμικό μοντέλο συνίσταται από τις διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν αναλυτικά τη σχέση ανάμεσα στις **ροπές** των κινητήρων που κινούν τις αρθρώσεις του βραχίονα και την
 - Κίνηση (θέση & προσανατολισμός), και
 - Αλληλεπίδραση (δυνάμεις/ροπές) του μηχανισμού (μέσα στο / με το) περιβάλλον.



Μεθοδολογίες Δυναμικής Ρομποτικών Βραχιόνων

- Οι δυναμικές εξισώσεις είναι δυνατό να αναπτυχθούν
 - στον τρισδιάστατο χώρο λειτουργίας του ρομπότ
 - στον χώρο των μεταβλητών των αρθρώσεων του.
- Στα πλαίσια του μαθήματος θα ασχοληθούμε με το δυναμικό μοντέλο του χώρου αρθρώσεων.



- Για την εξαγωγή του εφαρμόζονται διάφορες μέθοδοι, όπως
 - Euler-Lagrange,
 - Newton-Euler
 - Kane
- Η πιο (εκπαιδευτικά) κατάλληλη είναι η μέθοδος Euler-Lagrange που θα παρουσιαστεί και στη συνέχεια.

Η Μέθοδος Euler-Lagrange

- **Γενικευμένες συντεταγμένες:** λ_i ($i = 1, \dots, n$) περιγράφουν τις θέσεις των συνδέσμων.
- **Λαγκρανζιανή (Lagrangian):** συνάρτηση των γενικευμένων συντεταγμένων

$$L(\lambda, \dot{\lambda}) = T(\lambda, \dot{\lambda}) - U(\lambda)$$

T : ολική κινητική ενέργεια του συστήματος

U : ολική δυναμική ενέργεια του συστήματος.

- Ρομποτικός βραχίονας: ως γενικευμένες συντεταγμένες μπορούν να επιλεγούν οι μεταβλητές των αρθρώσεων,

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = q = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}$$

- Οι δυναμικές εξισώσεις του βραχίονα προκύπτουν από την παρακάτω σχέση

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = \xi_i \quad i = 1, \dots, n$$

όπου ξ_i είναι η γενικευμένη δύναμη που αντιστοιχεί στη γενικευμένη συντεταγμένη λ_i .

Η Μέθοδος Euler-Lagrange

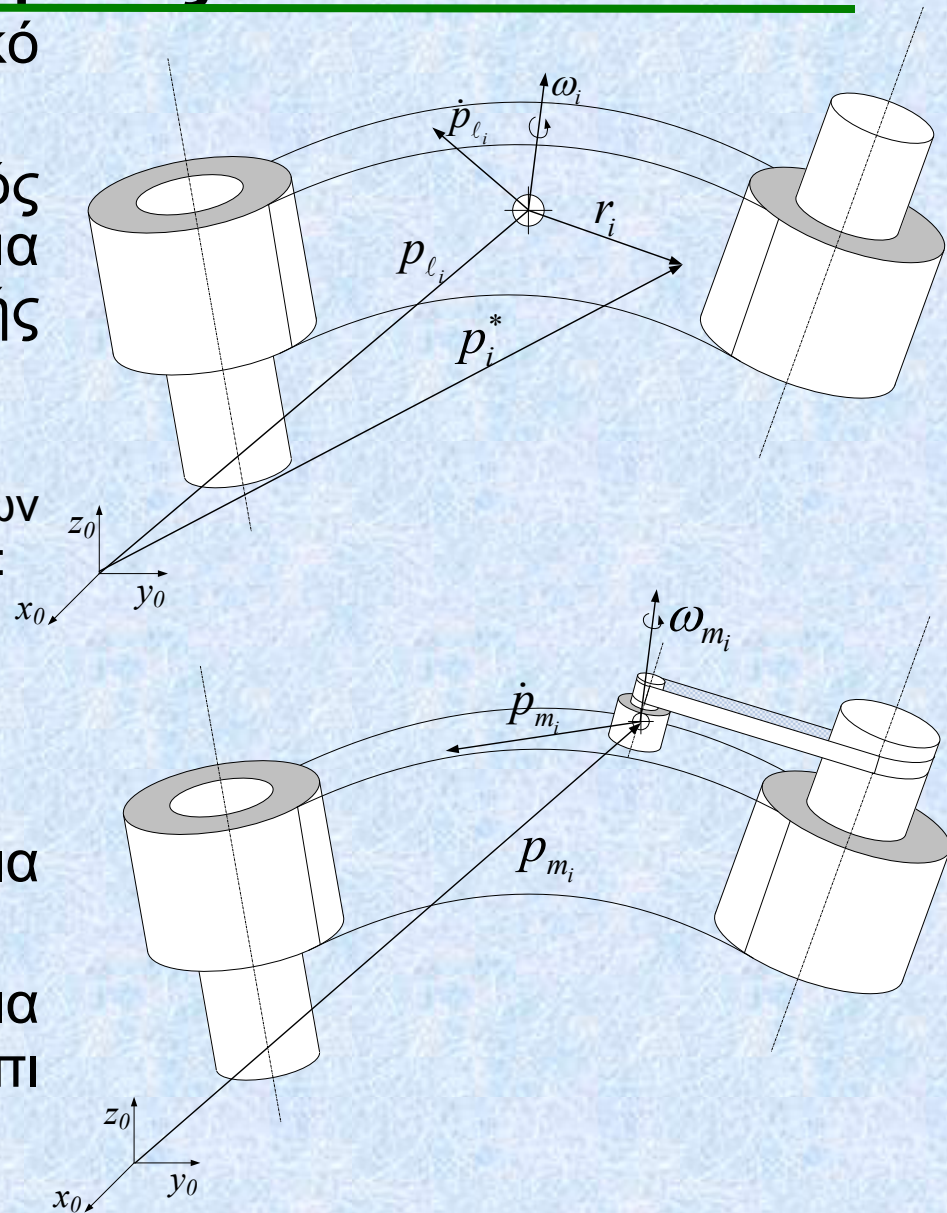
- Οι γενικευμένες δυνάμεις προκύπτουν από
 - τις **μη-συντηρητικές δυνάμεις** που ασκούνται στην κατασκευή, π.χ. τις ροπές των κινητήρων που οδηγούν τις αρθρώσεις, τις ροπές τριβής στις αρθρώσεις, καθώς επίσης και
 - τις ροπές που αναπτύσσονται στις αρθρώσεις ως αποτέλεσμα των **δυνάμεων αλληλεπίδρασης** με το περιβάλλον (π.χ. στον ακροδέκτη)
- Η σχέση
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = \xi_i \quad i = 1, \dots, n$$
 - όταν εφαρμοστεί για $i = 1, \dots, n$ μας δίνει τις αναλυτικές σχέσεις που ισχύουν ανάμεσα στις γενικευμένες δυνάμεις που ασκούνται στο βραχίονα και στις μετατοπίσεις, τις ταχύτητες και τις επιταχύνσεις των αρθρώσεων.
 - βασίζεται στην **ολική κινητική** και την **ολική δυναμική** ενέργεια του συστήματος.

Προσδιορισμός της Ολικής Κινητικής Ενέργειας

- Θεωρούμε ένα ρομποτικό βραχίονα με n συνδέσμους.
- Η ολική κινητική ενέργεια ενός βραχίονα προκύπτει ως άθροισμα των συνεισφορών κινητικής ενέργειας λόγω κίνησης
 - των συνδέσμων και
 - των αντίστοιχων επενεργητών των που ευρίσκονται επί των συνδέσμων:

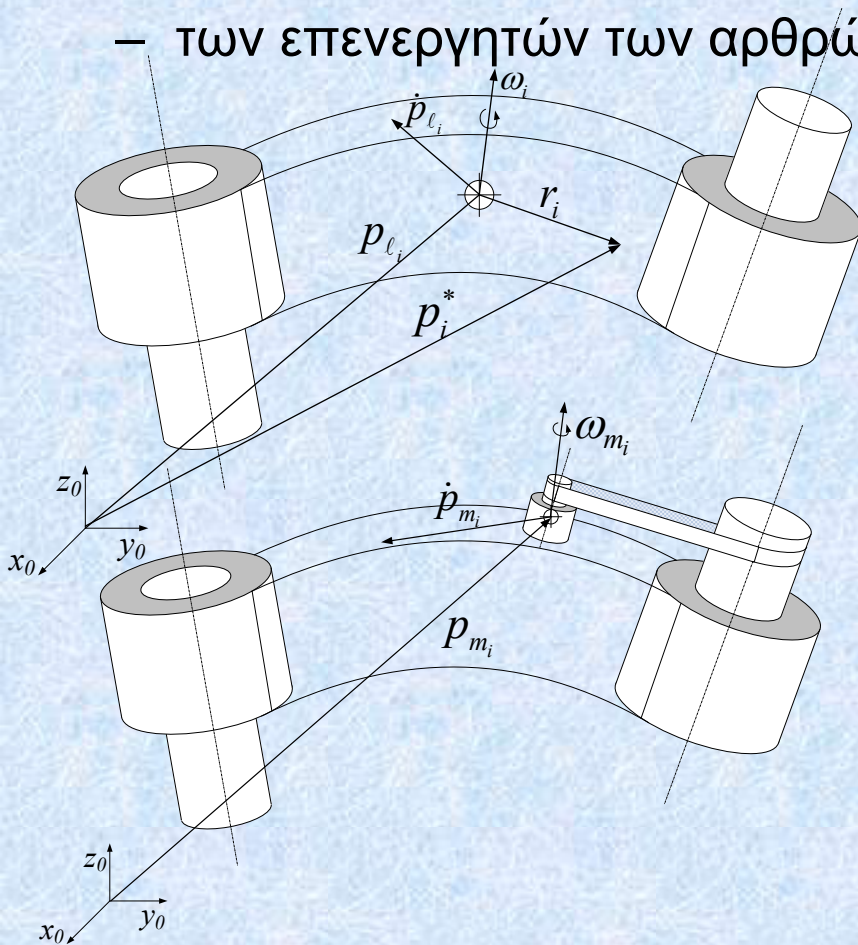
$$T(q, \dot{q}) = \sum_{i=1}^n [T_{\ell_i}(q, \dot{q}) + T_{m_i}(q, \dot{q})]$$

- $T_{\ell_i}(q, \dot{q})$ είναι η κινητική ενέργεια του i -συνδέσμου, και
- $T_{m_i}(q, \dot{q})$ είναι η κινητική ενέργεια του κινητήρα που ευρίσκεται επί του i -συνδέσμου.



Προσδιορισμός της Ολικής Δυναμικής Ενέργειας

- Η ολική δυναμική ενέργεια ενός βραχίονα προκύπτει ως άθροισμα των συνεισφορών δυναμικής ενέργειας
 - των συνδέσμων και
 - των επενεργητών των αρθρώσεων



δυναμική ενέργεια
του συνδέσμου i

$$U(q) = \sum_{i=1}^n \left[U_{\ell_i}(q) + U_{m_i}(q) \right]$$

δυναμική ενέργεια του
κινητήρα που επενεργεί
στην άρθρωση i

Προσδιορισμός των Εξισώσεων Κίνησης

- Με δεδομένες την ολική **κινητική** και την ολική **δυναμική** ενέργεια από τις σχέσεις που έχουν προηγηθεί, προκύπτουν:

$$T(q, \dot{q}) = \sum_{i=1}^n (T_{\ell_i} + T_{m_i})$$

$$U(q) = \sum_{i=1}^n (U_{\ell_i}(q) + U_{m_i}(q))$$

- Η Λαγκρανζιανή:

$$L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - U(q)$$

- που μέσω των εξισώσεων Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \xi_i \quad i = 1, \dots, n$$

- οδηγούν στις δυναμικές εξισώσεις τύπου Euler-Lagrange του ρομπότ:

$$B(q) \cdot \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \cdot \dot{q} + G(q) = \xi$$

Το Δυναμικό Μοντέλλο

- Με βάση τη παραπάνω μεθοδολογία το δυναμικό μοντέλλο ενός ρομποτικού βραχίονα είναι

$$B(q) \cdot \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \cdot \dot{q} + G(q) = \xi$$

όπου

- $B(q)$: μητρώο **αδράνειας**.
 - Τα διαγώνια στοιχεία του $b_{ii}(q)$ αναπαριστούν τη ροπή αδράνειας του άξονα της άρθρωσης i , στην εκάστοτε θέση του βραχίονα, όταν οι υπόλοιπες αρθρώσεις είναι ακίνητες.
 - Τα μη διαγώνια στοιχεία του $b_{ij}(q)$ περιγράφουν το αποτέλεσμα της επιτάχυνσης της άρθρωσης j στην άρθρωση i .
- $C(q, \dot{q})$: μητρώο, το οποίο περιέχει τις **φυγόκεντρες** ροπές και τις ροπές **Coriolis** που αναπτύσσονται στο βραχίονα. Προκύπτει από το μητρώο κινητικής ενέργειας, μετά από παραγωγίσεις.
- $G(q)$: διάνυσμα **βαρυτικών** όρων, εξαρτώνται μόνο από τις μετατοπίσεις των αρθρώσεων του βραχίονα και προέρχονται από την ολική δυναμική ενέργεια και συνιστούν. Αναπαριστούν τη ροπή που αναπτύσσεται στον άξονα μιας άρθρωσης, στην εκάστοτε θέση του βραχίονα, λόγω βαρύτητας.
- ξ : μη συντηρητικές δυνάμεις που παράγουν έργο στις αρθρώσεις του βραχίονα:

$$\xi = \tau - F_u \cdot \dot{q}_i - F_s \cdot \operatorname{sgn}(\dot{q}_i).$$

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ +1 & x > 0 \end{cases}$$

- F_u, F_s : διαγώνια μητρώα των σταθερών ιξώδους και στατικής τριβής του, αντίστοιχα.

Το Δυναμικό Μοντέλο συνεχ.

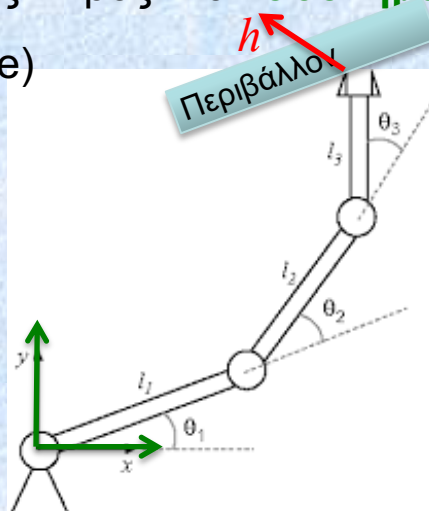
- Στην περίπτωση που το εργαλείο του βραχίονα βρίσκεται σε επαφή με το περιβάλλον ένα μέρος των ροπών χρησιμοποιείται για να αντισταθμίσει τις ροπές που αναπτύσσονται στις αρθρώσεις λόγω των δυνάμεων επαφής:

$$\tau_{contact} = J^T(q) \cdot h$$

– $J(q)$: γεωμετρική Ιακωβιανή που έχει προκύψει από τη διαφορική κινηματική

– $h = \begin{bmatrix} f^T & \mu^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^6$: σύνθετο διάνυσμα δυνάμεων ($f \in \mathbb{R}^3$) και ροπών ($\mu \in \mathbb{R}^3$) που

- ασκούνται από τον ακροδέκτη του βραχίονα προς το περιβάλλον, και
- εκφράζονται ως προς το σύστημα συντεταγμένων της βάσης (world coordinate frame)



Προσοχή: αν η δυναμο-ροπή h είναι διαθέσιμη ως προς το σύστημα συντεταγμένων του ακροδέκτη (π.χ. προέρχεται από σχετικό αισθητήρα) πρέπει να ευρεθεί η έκφρασή της ως προς το σύστημα συντεταγμένων βάσης

Το Δυναμικό Μοντέλο συνεχ.

- Συνοψίζοντας, το Δυναμικό μοντέλο χώρου αρθρώσεων ενός ρομποτικού βραχίονα μπορούν να γραφτούν σε μητρωϊκή μορφή ως εξής:

$$B(q) \cdot \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \cdot \dot{q} + F_u \cdot \dot{q} + F_s \cdot \text{sgn}(\dot{q}) + G(q) + J^T(q) \cdot h = \tau$$

- Αξιοσημείωτες Ιδιότητες του Δυναμικού Μοντέλου:
αφορούν
 - τον Πίνακα αδράνειας
 - τον διάνυσμα Φυγόκεντρων και Coriolis
 - τους όρους Βαρύτητας και Ιξώδους Τριβής, και
 - την Γραμμικότητα του Δυναμικού μοντέλου ως προς τις Γεωμετρικές και Μηχανικές Παραμέτρους

Η Μέθοδος Euler-Lagrange: Παράδειγμα-1



$$T = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \dot{\theta}^2$$

$$U = m \cdot g \cdot \frac{\ell}{2} \cdot (1 - \cos \theta)$$

$$L = T - U = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \dot{\theta}^2 - m \cdot g \cdot \frac{\ell}{2} \cdot (1 - \cos \theta)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -m \cdot g \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \sin \theta$$

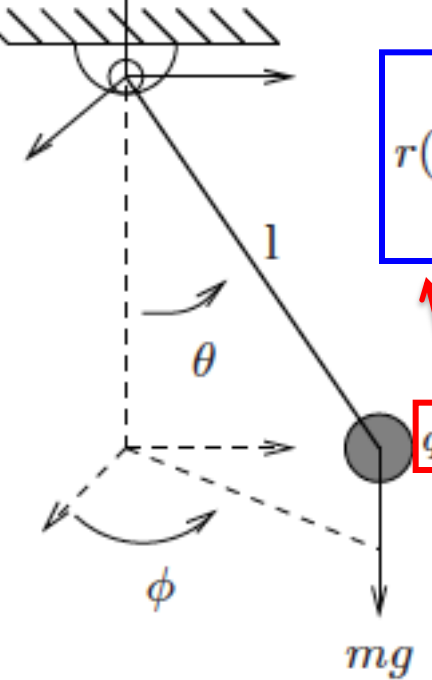
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = I \cdot \dot{\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right] - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \xi \Rightarrow I \cdot \ddot{\theta} + m \cdot g \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \sin \theta = \tau$$

$$B(q) \cdot \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \cdot \dot{q} + F_u \cdot \dot{q} + F_s \cdot \text{sgn}(\dot{q}) + G(q) + J^T(q) \cdot h = \tau$$

- Απλός και ευθύς τρόπος. Ενδείκνυται όταν η απλότητα της διάταξης το επιτρέπει. (Τι γίνεται όμως όταν έχουμε πολύπλοκους μηχανισμούς?)

Η Μέθοδος Euler-Lagrange: Παράδειγμα-2



$$r(\theta, \phi) = \begin{bmatrix} l \sin \theta \cos \phi \\ l \sin \theta \sin \phi \\ -l \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$q = (\theta, \phi)$$

$$T = \frac{1}{2} m \|\dot{r}\|^2 = \frac{1}{2} m l^2 (\dot{\theta}^2 + (1 - \cos^2 \theta) \dot{\phi}^2)$$

$$V = -mgl \cos \theta$$

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m l^2 (\dot{\theta}^2 + (1 - \cos^2 \theta) \dot{\phi}^2) + mgl \cos \theta$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{d}{dt} (m l^2 \dot{\theta}) = m l^2 \ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = m l^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 - mgl \sin \theta$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \frac{d}{dt} (m l^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}) = m l^2 \sin^2 \theta \ddot{\phi} + 2 m l^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\theta} \dot{\phi}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$$

$$\begin{bmatrix} m l^2 & 0 \\ 0 & m l^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -m l^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 \\ 2 m l^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\theta} \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} mgl \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$B(q) \cdot \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \cdot \dot{q} + F_u \cdot \dot{q} + F_s \cdot \text{sgn}(\dot{q}) + G(q) + J^T(q) \cdot h = \tau$$

Αξιοσημείωτες Ιδιότητες του Δυναμικού Μοντέλου τύπου E-L: **ο πίνακας Αδράνειας**

$$B(q) \cdot \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \cdot \dot{q} + G(q) = \xi$$

- Ιδιότητες του πίνακα αδράνειας $B(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$:
 - εξαρτάται από την «θεση» q του βραχίονα
 - είναι συμμετρικός: $B(q) = B^T(q)$, και
 - είναι **θετικά ορισμένος**: $x^T \cdot B(q) \cdot x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$
 - είναι άνω και κάτω φραγμένος

$$\mu_1 \cdot I_{n \times n} \leq B(q) \leq \mu_2 \cdot I_{n \times n} \Rightarrow \begin{cases} x^T \cdot [B(q) - \mu_1 \cdot I_{n \times n}] \cdot x \geq 0 & \forall x \in \mathbb{R}^n \\ x^T \cdot [\mu_2 \cdot I_{n \times n} - B(q)] \cdot x \geq 0 & \forall x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

- ο αντίστροφός του είναι άνω & κάτω φραγμένος

$$\frac{1}{\mu_2} \cdot I_{n \times n} \leq B^{-1}(q) \leq \frac{1}{\mu_1} \cdot I_{n \times n}$$

Αξιοσημείωτες Ιδιότητες του Δυναμικού Μοντέλου τύπου E-L: **ο πίνακας Αδράνειας**

$$B(q) \cdot \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \cdot \dot{q} + G(q) = \xi$$

- Για τα μ_1, μ_2 ισχύει, αναλογα με το αν ο βραχίονας έχει όλες τις αρθρώσεις του:
 - **περιστροφικές**: $\mu_1, \mu_2 = const.$ γιατί τα στοιχεία του $B(q)$ περιέχουν $\sin(\cdot), \cos(\cdot)$
 - **πρισματικές**: μ_1, μ_2 είναι βαθμωτές συναρτήσεις του q
- Δεδομένου ότι ο $B(q)$ είναι φραγμένος, τότε
$$M_1 \leq \|B(q)\| \leq M_2$$
όπου η νόρμα του $B(q)$ μπορεί να είναι οιαδήποτε ορισμένη νόρμα: $1, 2, \dots, p, \dots, \infty$

Αξιοσημείωτες Ιδιότητες του Δυναμικού Μοντέλου τύπου E-L: **ο όρος Φυγόκεντρων & Coriolis**

- Αν $c(q, \dot{q}) \triangleq C(q, \dot{q}) \cdot \dot{q}$ $B(q) \cdot \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \cdot \dot{q} + G(q) = \xi$
 - Για το k -στοιχείο του $c(q, \dot{q})$ ισχύει:
$$c_k(q, \dot{q}) = \dot{q}^T \cdot S_k(q) \cdot \dot{q} \quad S_k(q) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial b_k}{\partial q} + \left(\frac{\partial b_k}{\partial q} \right)^T - \frac{\partial B}{\partial q_k} \right]$$

με b_k : την k -στήλη του $B(q)$
 - Ο όρος $c(q, \dot{q})$ είναι τετραγωνικός ως προς το $\dot{q}$
και
$$\|c(q, \dot{q})\| = \|C(q, \dot{q}) \cdot \dot{q}\| \leq p_c \cdot \|\dot{q}\|^2$$
- Για τα p_c ισχύει, αναλογα με το αν ο βραχίονας έχει όλες τις αρθρώσεις του:
 - **περιστροφικές**: $p_c = \text{const.}$ γιατί τα στοιχεία του $B(q)$ περιέχουν μόνο συναρτήσεις $\sin(\cdot)$, $\cos(\cdot)$ του q .
 - **πρισματικές**: p_c είναι βαθμωτή συνάρτηση του q

Αξιοσημείωτες Ιδιότητες του Δυναμικού Μοντέλου τύπου E-L : **ο όρος Φυγόκεντρων & Coriolis**

- Ενώ το διάνυσμα $c(q, \dot{q}) \triangleq C(q, \dot{q}) \cdot \dot{q}$ είναι σαφώς καθορισμένο για δεδομένο βραχίονα, ο πίνακας $C(q, \dot{q})$ **δεν είναι** μονοσήμαντα ορισμένος
- Αν ορίσουμε τον πίνακα $N(q, \dot{q}) \triangleq \dot{B}(q) - 2 \cdot C(q, \dot{q})$
 - Ανεξαρτήτως επιλογής του $C(q, \dot{q})$ ισχύει
$$\dot{q}^T \cdot N(q, \dot{q}) \cdot \dot{q} = 0$$
 - Με κατάλληλη επιλογή του $C(q, \dot{q})$ (χρήση *συμβόλων Christoffel*) τότε ο πίνακας είναι αντισυμμετρικός, δηλ. $N(q, \dot{q}) = -N^T(q, \dot{q})$, δηλαδή ισχύει:
$$w^T \cdot N(q, \dot{q}) \cdot w = 0 \quad \forall w$$

$$B(q) \cdot \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \cdot \dot{q} + G(q) = \xi$$

Αξιοσημείωτες Ιδιότητες του Δυναμικού Μοντέλου τύπου E-L : **Βαρυτικός & όρος Ιξώδους Τριβής**

$$B(q) \cdot \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \cdot \dot{q} + \underline{F_u} \cdot \dot{q} + F_s \cdot \text{sgn}(\dot{q}) + \underline{G(q)} + J^T(q) \cdot h = \tau$$

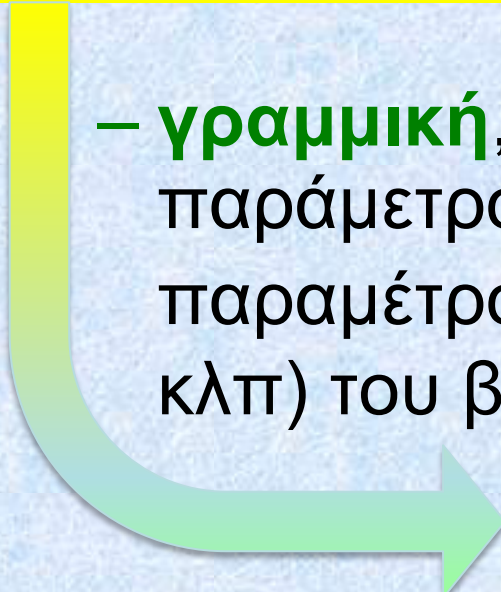
- Ο όρος της **ιξώδους τριβής** είναι φραγμένος
$$\|F_u \cdot \dot{q}\| \leq f_{max} \cdot \|\dot{q}\|$$
- Ο όρος της **βαρύτητας** είναι φραγμένος
$$\|G(q)\| \leq g_b(q)$$
 - Για τη συνάρτηση $g_b(q)$ ισχύει, αναλογα με το αν όλες οι αρθρώσεις του βραχίονα είναι:
 - **περιστροφικές**: $g_b(q) = \text{const.}$ γιατί τα στοιχεία του $G(q)$ περιέχουν μόνο συναρτήσεις $\sin(\cdot)$, $\cos(\cdot)$ του q .
 - **πρισματικές**: $g_b(q)$ είναι βαθμωτή συνάρτηση του q

Αξιοσημείωτες Ιδιότητες του Δυναμικού Μοντέλου τύπου E-L : Γραμμικότητα ως προς Γεωμετρικές & Μηχανικές Παραμέτρους

- Το δυναμικό μοντέλο ενός βραχίονα είναι συνάρτηση:
 - **μη-γγραμμική** (στη γενική περίπτωση) των $(q, \dot{q}, \ddot{q})$

$$B(q) \cdot \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \cdot \dot{q} + F_u \cdot \dot{q} + F_s \cdot \text{sgn}(\dot{q}) + G(q) + J^T(q) \cdot h = \tau$$

- **γγραμμική**, ως προς τις γεωμετρικές (π.χ. παράμετροι *Denavit-Hartenberg*) & μηχανικές παραμέτρους (π.χ. μάζες, αδράνειες, τριβές, κλπ) του βραχίονα, δηλαδή


$$Y(q, \dot{q}, \ddot{q}) \cdot \pi = \tau$$

Αξιοσημείωτες Ιδιότητες του Δυναμικού Μοντέλου τύπου E-L : Γραμμικότητα ως προς Γεωμετρικές & Μηχανικές Παραμέτρους

- Η “γραμμική”-μορφή του δυναμικού μοντέλου E-L είναι χρήσιμη για την αναγνώριση των (πιθανά) αγνώστων παραμέτρων π του βραχίονα μέσω της εξής μεθοδολογίας:

- Εκτελούνται τροχιές $(q(t), \dot{q}(t), \ddot{q}(t)) \quad t \in [0, t_f]$
- Κατά την διάρκεια αυτών «καταγράφονται» οι τιμές $(q(t_i), \dot{q}(t_i), \ddot{q}(t_i), \tau(t_i)) \quad t_i \in [0, t_f] \quad i = 0, 1, 2, \dots$
- Δημιουργούμε τα (συνήθως μεγάλου μήκους) διανύσματα T και (ψηλό) πίνακα Y βαζοντας αντίστοιχα τα $\tau(t_i)$ και $Y(t_i)$ το ένα πάνω στο άλλο
- Η εκτίμηση $\hat{\pi}$ του π δίδεται με χρήση του ψευδοαντίστροφου $Y^\#$ του πίνακα Y

$$\hat{\pi} = Y^\# \cdot T \triangleq (Y^T \cdot Y)^{-1} \cdot Y^T \cdot T$$

Ευθεία & Αντίστροφη Δυναμική

- Το Δυναμικό μοντέλο χώρου αρθρώσεων ενός ρομποτικού βραχίονα γράφεται σε μητρωϊκή μορφή ως εξής:

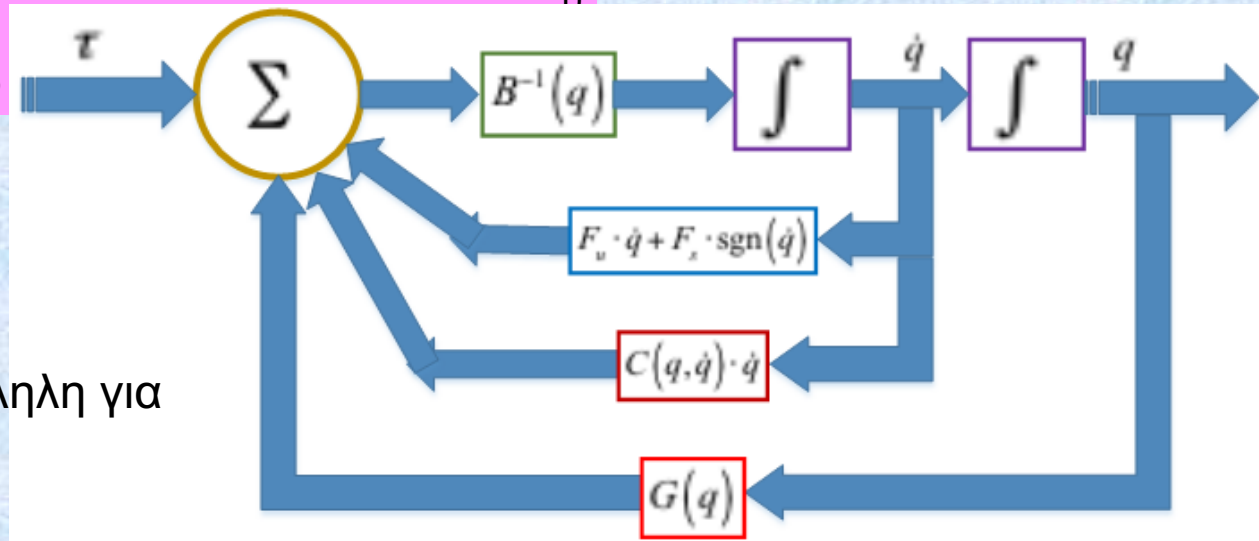
$$B(q) \cdot \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \cdot \dot{q} + F_u \cdot \dot{q} + F_s \cdot \text{sgn}(\dot{q}) + G(q) + J^T(q) \cdot h = \tau$$

- Αυτό είναι η μορφή **αντίστροφης δυναμικής** που ουσιαστικά αφορά τον προσδιορισμό των ροπών που είναι αναγκαίες για να υλοποιήσουν αυτή την κίνηση του βραχίονα, η οποία περιγράφεται από συγκεκριμένες μετατοπίσεις, ταχύτητες και επιταχύνσεις $(q, \dot{q}, \ddot{q})$ των αρθρώσεων.
- Αυτή η μορφή είναι κατάλληλη για προσομοίωση ενός ρομπότ
- Η **ευθεία δυναμική** συνίσταται στον προσδιορισμό των επιταχύνσεων και (μέσω αριθμητικής ολοκλήρωσης) των ταχυτήτων & μετατοπίσεων των αρθρώσεων που προκαλούνται από την εφαρμογή κάποιων συγκεκριμένων συναρτήσεων ροπών στις αρθρώσεις του βραχίονα, όταν είναι γνωστή η αρχική κατάσταση του συστήματος (δηλ. οι θέσεις και οι ταχύτητες):

$$\ddot{q} = B^{-1}(q) \cdot \left\{ \tau - \left[C(q, \dot{q}) \cdot \dot{q} + F_u \cdot \dot{q} + F_s \cdot \text{sgn}(\dot{q}) + G(q) + J^T(q) \cdot h \right] \right\}$$

$$q(t=0) = q_0, \quad \dot{q}(t=0) = \dot{q}_0$$

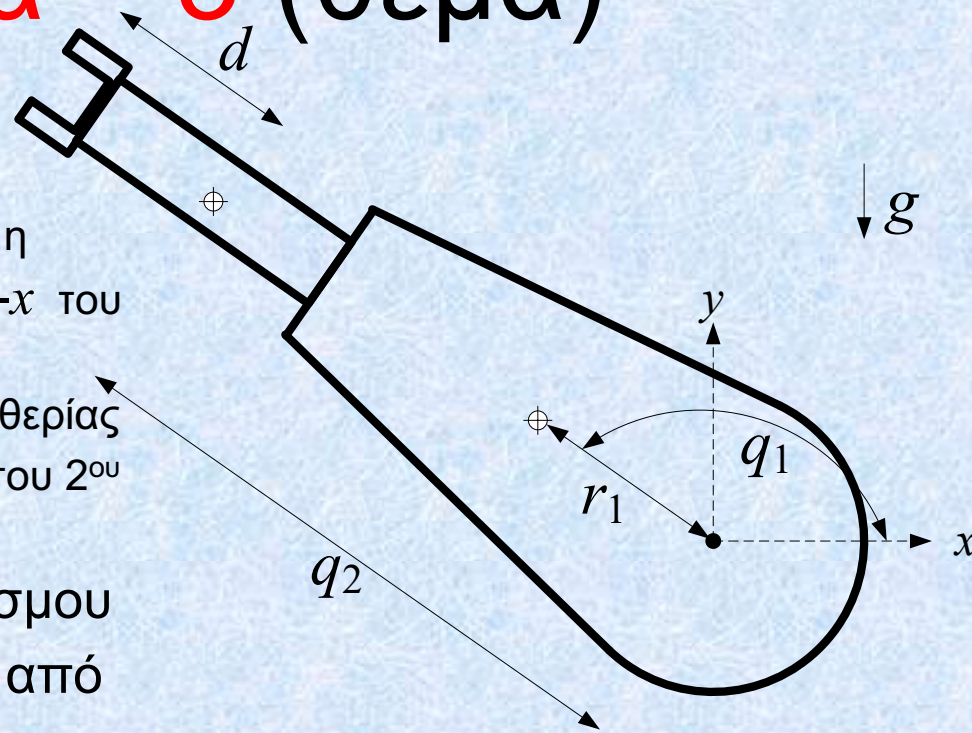
Έχει νόημα
γιατί $B(q) > 0$



- Αυτή η μορφή είναι κατάλληλη για έλεγχο

Παράδειγμα – 3 (θέμα)

- Ένας ρομποτικός βραχίονας-PR αποτελείται από
 - ένα περιστροφικό βαθμό ελευθερίας (q_1 : η γωνία του 1^{ου} συνδέσμου από τον άξονα- x του αδρανειακού συστήματος) και
 - ένα πρισματικό (μεταφορικό) βαθμό ελευθερίας ($q_2 > 0$: η απόσταση του κέντρου μάζας του 2^{ου} συνδέσμου).
- Το κέντρο μάζας του πρώτου συνδέσμου ευρίσκεται σε σταθερή απόσταση r_1 από τη πρώτη άρθρωση.
- Ο 1^{ος} σύνδεσμος θεωρείται ότι έχει ροπή αδράνειας I_1 ως προς το κέντρο μάζας του και μάζα m_1 .
- Ο 2^{ος} σύνδεσμος έχει ροπή αδράνειας I_2 ως προς το κέντρο μάζας του μάζα m_2 .
- Η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι g και κατά τον άξονα- y .



Κινητική Ενέργεια

$$T_1 = \frac{1}{2} \cdot (I_1 + m_1 r_1^2) \cdot \dot{q}_1^2$$

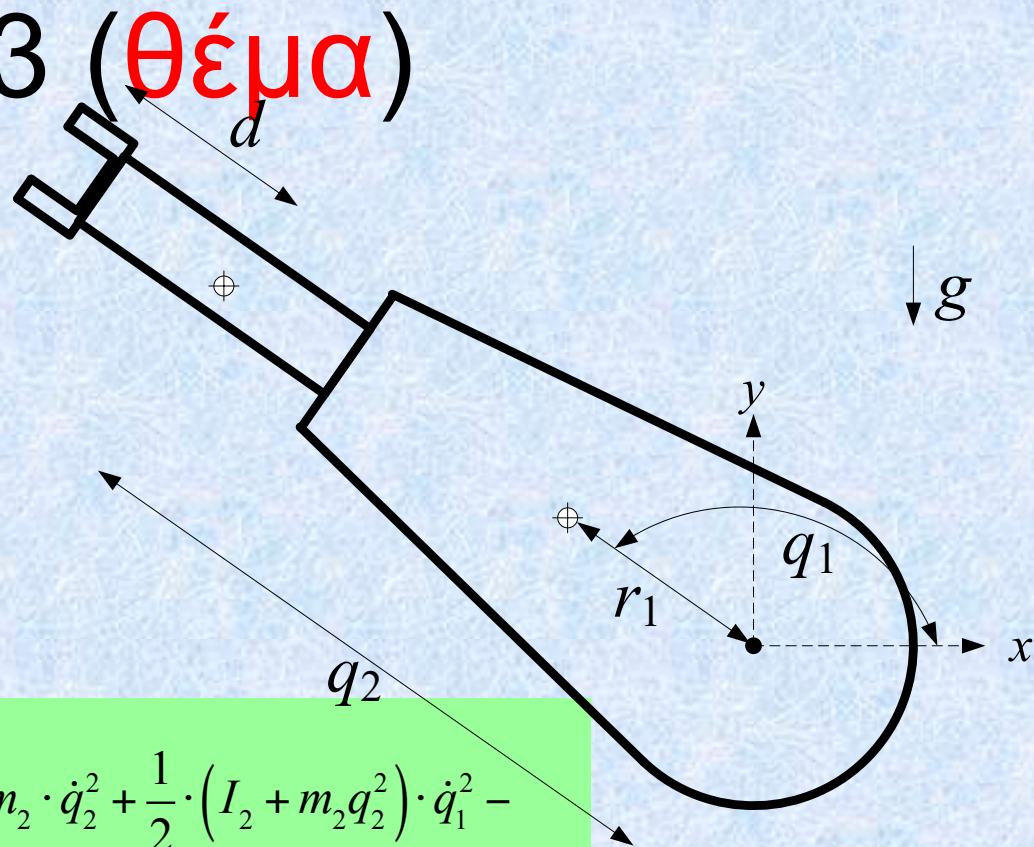
$$T_2 = \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} \cdot (I_2 + m_2 q_2^2) \cdot \dot{q}_1^2$$

Παράδειγμα – 3 (θέμα)

Δυναμική Ενέργεια

$$U_1 = m_1 \cdot g \cdot r_1 \cdot \sin q_1 = (m_1 \cdot r_1 \cdot \sin q_1) \cdot g$$

$$U_2 = m_2 \cdot g \cdot q_2 \cdot \sin q_1 = (m_1 \cdot q_2 \cdot \sin q_1) \cdot g$$



Λαγκρανζιανή

$$L = T_1 + T_2 - U_1 - U_2 = \frac{1}{2} \cdot (I_1 + m_1 r_1^2) \cdot \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} \cdot (I_2 + m_2 q_2^2) \cdot \dot{q}_1^2 - (m_1 \cdot r_1 \cdot \sin q_1) \cdot g - (m_2 \cdot q_2 \cdot \sin q_1) \cdot g$$

Εξισώσεις Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right] - \left[\frac{\partial L}{\partial q} \right] = u \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right] \\ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right] \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial q_1} \\ \frac{\partial L}{\partial q_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα – 3 (θέμα)

Εξισώσεις Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right] - \left[\frac{\partial L}{\partial q} \right] = u \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right] \\ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right] \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial q_1} \\ \frac{\partial L}{\partial q_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

$$L = T_1 + T_2 - U_1 - U_2 = \frac{1}{2} \cdot (I_1 + m_1 r_1^2) \cdot \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} \cdot (I_2 + m_2 q_2^2) \cdot \dot{q}_1^2 - (m_1 \cdot r_1 \cdot \sin q_1) \cdot g - (m_2 \cdot q_2 \cdot \sin q_1) \cdot g$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = (I_1 + m_1 r_1^2) \cdot \dot{q}_1 + (I_2 + m_2 q_2^2) \cdot \dot{q}_1 =$$

$$= (I_1 + m_1 r_1^2 + I_2 + m_2 q_2^2) \cdot \dot{q}_1 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right] = (I_1 + m_1 r_1^2 + I_2 + m_2 q_2^2) \cdot \ddot{q}_1 + 2m_2 q_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = m_2 \cdot \dot{q}_2 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right] = m_2 \cdot \ddot{q}_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = -(m_1 \cdot r_1 \cdot \cos q_1) \cdot g - (m_2 \cdot q_2 \cdot \cos q_1) \cdot g = -(m_1 \cdot r_1 + m_2 \cdot q_2) \cdot \cos q_1 \cdot g$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = m_2 \cdot q_2 \cdot \dot{q}_1^2 - m_2 \cdot \sin q_1 \cdot g$$

Δυναμικές εξισώσεις

$$(I_1 + m_1 r_1^2 + I_2 + m_2 q_2^2) \cdot \ddot{q}_1 + 2m_2 q_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + (m_1 \cdot r_1 + m_2 \cdot q_2) \cdot \cos q_1 \cdot g = \tau_1$$

$$m_2 \cdot \ddot{q}_2 - m_2 \cdot q_2 \cdot \dot{q}_1^2 + m_2 \cdot \sin q_1 \cdot g = f_2$$

Παράδειγμα – 3 (θέμα)

Δυναμικές εξισώσεις

$$(I_1 + m_1 r_1^2 + I_2 + m_2 q_2^2) \cdot \ddot{q}_1 + 2m_2 q_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + (m_1 \cdot r_1 + m_2 \cdot q_2) \cdot \cos q_1 \cdot g = \tau_1$$

$$m_2 \cdot \ddot{q}_2 - m_2 \cdot q_2 \cdot \dot{q}_1^2 + m_2 \cdot \sin q_1 \cdot g = f_2$$

Δυναμικές Εξισώσεις σε Μητρική Μορφή

$$\begin{bmatrix} I_1 + m_1 r_1^2 + I_2 + m_2 q_2^2 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2m_2 q_2 \dot{q}_2 & 0 \\ -m_2 \cdot q_2 \cdot \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (m_1 \cdot r_1 + m_2 \cdot q_2) \cdot \cos q_1 \\ m_2 \cdot \sin q_1 \end{bmatrix} \cdot g = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

$B(q) \cdot \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \cdot \dot{q} + F_u \cdot \dot{q} + F_s \cdot \operatorname{sgn}(\dot{q}) + \overbrace{G(q)} + J^T(q) \cdot h = u$

• Αξιοσημείωτες Ιδιότητες του Δυναμικού Μοντέλου

- Το **μητρώο αδράνειας** $(B(q))$ είναι συμμετρικό $B(q) = B^T(q)$, θετικά ορισμένο, και γενικά εξαρτώμενο από την εκάστοτε θέση του βραχίονα.
- Αντισυμμετρικότητα (δηλ. $N = -N^T$) του μητρώου: $N(q, \dot{q}) = \dot{B}(q) - 2 \cdot C(q, \dot{q})$
- Γραμμικότητα ως προς τις δυναμικές παραμέτρους : $Y(q, \dot{q}, \ddot{q}) \cdot \pi = u$

Παράδειγμα – 3 (θέμα)

- Αξιοσημείωτες Ιδιότητες του Δυναμικού Μοντέλου

– Γραμμικότητα ως προς τις δυναμικές παραμέτρους : $Y(q, \dot{q}, \ddot{q}) \cdot \pi = u$

Δυναμικές εξισώσεις

$$(I_1 + m_1 r_1^2 + I_2 + m_2 q_2^2) \cdot \ddot{q}_1 + 2m_2 q_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + (m_1 \cdot r_1 + m_2 \cdot q_2) \cdot \cos q_1 \cdot g = \tau_1$$

$$m_2 \cdot \ddot{q}_2 - m_2 \cdot q_2 \cdot \dot{q}_1^2 + m_2 \cdot \sin q_1 \cdot g = f_2$$

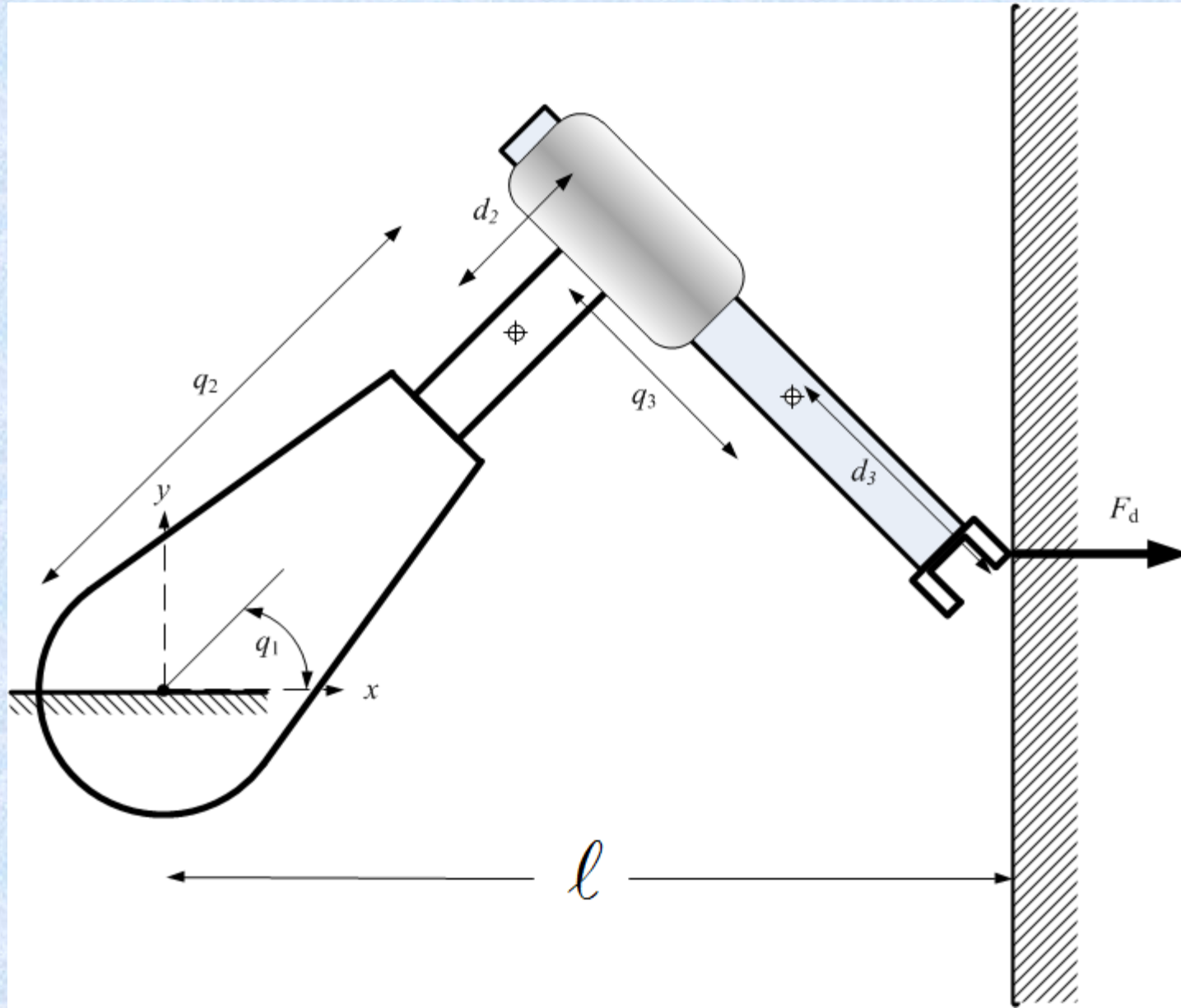
$$\ddot{q}_1 \cdot (I_1 + m_1 r_1^2 + I_2) + (\cos q_1 \cdot g) \cdot m_1 r_1 + (q_2^2 \cdot \ddot{q}_1 + 2q_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + q_2 \cdot \cos q_1 \cdot g) \cdot m_2 = \tau_1$$

$$(\ddot{q}_2 - q_2 \cdot \dot{q}_1^2 + \sin q_1 \cdot g) \cdot m_2 = f_2$$

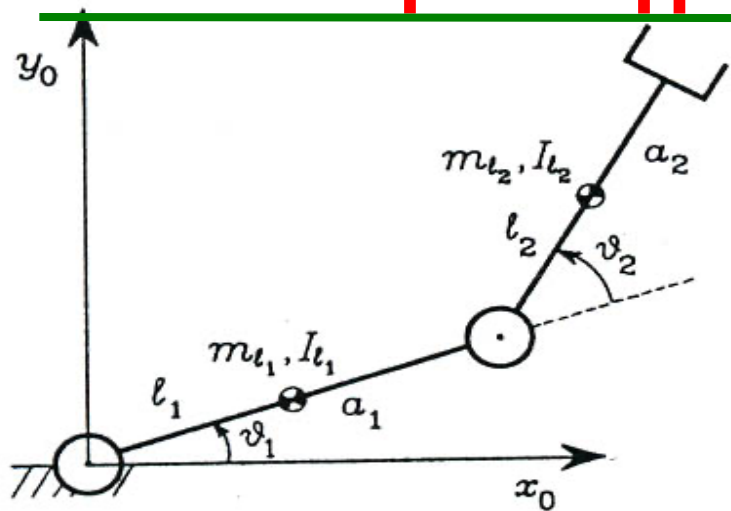
$$\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 & \cos q_1 \cdot g & q_2^2 \cdot \ddot{q}_1 + 2q_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + q_2 \cdot \cos q_1 \cdot g \\ 0 & 0 & \ddot{q}_2 - q_2 \cdot \dot{q}_1^2 + \sin q_1 \cdot g \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 + m_1 r_1^2 + I_2 \\ m_1 r_1 \\ m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

$$\overbrace{Y(q, \dot{q}, \ddot{q})} \cdot \overbrace{\pi} = \overbrace{u}$$

Άσκηση: Δυναμικό Μοντέλο βραχίονα 3 β.ε. σε
Αλληλεπίδραση με το περιβάλλον (θέμα?)



Παράδειγμα – 4 (επόμενο θέμα ?)

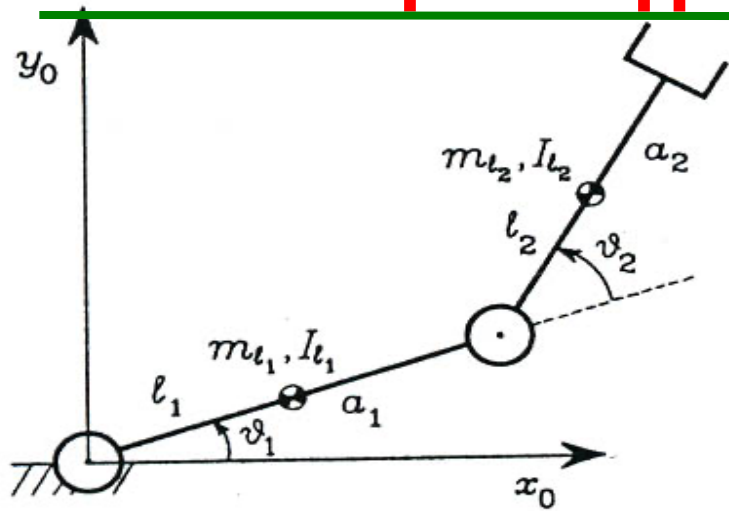


Οριζόντιος Βραχίονας 2 DOF

- Δυναμική Euler-Lagrange
- Πιστοποίηση Ιδιοτήτων Πινάκων
- “Y-π” μορφή

- $q = [\vartheta_1 \quad \vartheta_2]^T$: διάνυσμα των γενικευμένων συντεταγμένων
- $a_1 = a_2 = 1$: μήκη των συνδέσμων 1 και 2, αντίστοιχα
- $\ell_1 = \ell_2 = 0.5$: αποστάσεις των κέντρων μάζας των δύο συνδέσμων από τους αντίστοιχους άξονες περιστροφής
- $m_{\ell_1} = m_{\ell_2} = 50$: μάζες των δύο συνδέσμων
- $I_{\ell_1} = I_{\ell_2} = 10$: ροπές αδράνειας των συνδέσμων ως προς τα κέντρα μάζας τους αντίστοιχα
- Τα φαινόμενα τριβής θεωρούνται αμελητέα

Παράδειγμα – 4 (επόμενο θέμα ?)



$$q = \begin{bmatrix} \vartheta_1 & \vartheta_2 \end{bmatrix}^T$$

$$T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m_{\ell_1} \cdot \|v_1\|^2 + \frac{1}{2} I_{\ell_1} \cdot \omega_1^2 + \frac{1}{2} m_{\ell_2} \cdot \|v_2\|^2 + \frac{1}{2} I_{\ell_2} \cdot \omega_2^2$$

$$\omega_1 = \dot{\vartheta}_1 \quad \omega_2 = \dot{\vartheta}_1 + \dot{\vartheta}_2$$

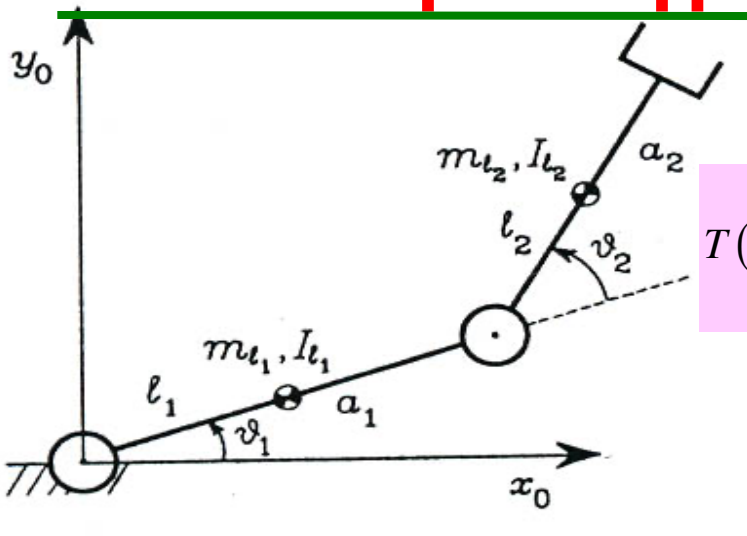
$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \ell_1 \cdot \cos \vartheta_1 \\ y_1 &= \ell_1 \cdot \sin \vartheta_1 \\ x_2 &= a_1 \cdot \cos \vartheta_1 + \ell_2 \cdot \cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) \\ y_2 &= a_1 \cdot \sin \vartheta_1 + \ell_2 \cdot \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\ell_1 \cdot \dot{\vartheta}_1 \cdot \sin \vartheta_1 \\ \dot{y}_1 &= \ell_1 \cdot \dot{\vartheta}_1 \cdot \cos \vartheta_1 \\ \dot{x}_2 &= -\dot{\vartheta}_1 \cdot [a_1 \cdot \sin \vartheta_1 + \ell_2 \cdot \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)] - \ell_2 \cdot \dot{\vartheta}_2 \cdot \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2) \\ \dot{y}_2 &= \dot{\vartheta}_1 \cdot [a_1 \cdot \cos \vartheta_1 + \ell_2 \cdot \cos(\vartheta_1 + \vartheta_2)] + \ell_2 \cdot \dot{\vartheta}_2 \cdot \cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) \end{aligned} \right.$$



$$T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m_{\ell_1} \cdot (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} I_{\ell_1} \cdot \dot{\vartheta}_1^2 + \frac{1}{2} m_{\ell_2} \cdot (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{1}{2} I_{\ell_2} \cdot (\dot{\vartheta}_1 + \dot{\vartheta}_2)^2$$



Παράδειγμα – 4 (επόμενο θέμα ?)



$$T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \cdot \dot{q}^T \cdot B(q) \cdot \dot{q} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\vartheta}_1 & \dot{\vartheta}_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11}(\vartheta_2) & b_{12}(\vartheta_2) \\ b_{21}(\vartheta_2) & b_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\vartheta}_1 \\ \dot{\vartheta}_2 \end{bmatrix}$$

$$B(q) = \begin{bmatrix} b_{11}(\vartheta_2) & b_{12}(\vartheta_2) \\ b_{21}(\vartheta_2) & b_{22} \end{bmatrix}$$

Οριζόντιος

$$U(q, \dot{q}) = 0 \Rightarrow L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q})$$

$$b_{11} = I_{\ell_1} + m_{\ell_1} \cdot \ell_1^2 + I_{\ell_2} + m_{\ell_2} \cdot (a_1^2 + \ell_2^2 + 2 \cdot a_1 \cdot \ell_2 \cdot \cos \vartheta_2)$$

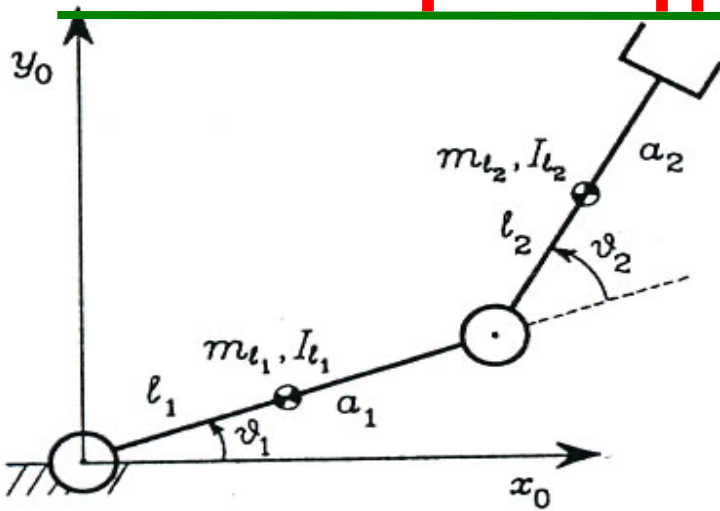
$$b_{12} = b_{21} = I_{\ell_2} + m_{\ell_2} \cdot (\ell_2^2 + a_1 \cdot \ell_2 \cdot \cos \vartheta_2)$$

$$b_{22} = I_{\ell_2} + m_{\ell_2} \cdot \ell_2^2$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \xi_i \quad i = 1, 2$$

$$\xi_i = \tau_i$$

Παράδειγμα – 4 (επόμενο θέμα ?)



$$B(q) \cdot \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \cdot \dot{q} = \tau$$

$$B(q) = \begin{bmatrix} b_{11}(\vartheta_2) & b_{12}(\vartheta_2) \\ b_{21}(\vartheta_2) & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} -m_{\ell_2} \cdot a_1 \cdot \ell_2 \cdot \sin \vartheta_2 \cdot \dot{\vartheta}_2 & -m_{\ell_2} \cdot a_1 \cdot \ell_2 \cdot \sin \vartheta_2 \cdot (\dot{\vartheta}_1 + \dot{\vartheta}_2) \\ m_{\ell_2} \cdot a_1 \cdot \ell_2 \cdot \sin \vartheta_2 \cdot \dot{\vartheta}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ας επιβεβαιώσουμε τώρα τις ιδιότητες του Δυναμικού Μοντέλου E-L

Παράδειγμα – 4 (επόμενο θέμα ?)

Αξιοσημείωτες Ιδιότητες του Δυναμικού Μοντέλου τύπου E-L: ο πίνακας Αδράνειας

$$B(q) = \begin{bmatrix} b_{11}(q_2) & b_{12}(q_2) \\ b_{21}(q_2) & b_{22}(q_2) \end{bmatrix}$$

$$b_{11} = I_{\ell_1} + m_{\ell_1} \cdot \ell_1^2 + I_{\ell_2} + m_{\ell_2} \cdot (a_1^2 + \ell_2^2 + 2 \cdot a_1 \cdot \ell_2 \cdot \cos \vartheta_2)$$

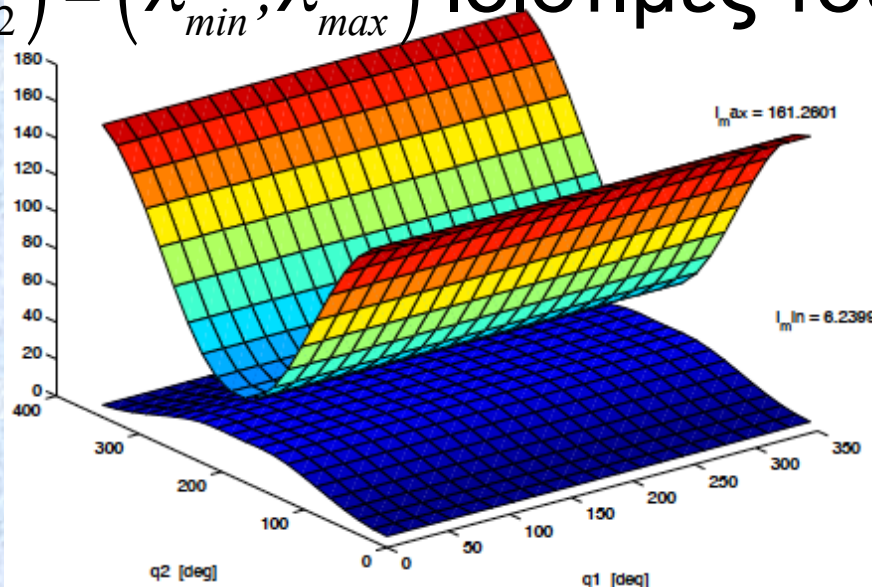
$$b_{12} = b_{21} = I_{\ell_2} + m_{\ell_2} \cdot (\ell_2^2 + a_1 \cdot \ell_2 \cdot \cos \vartheta_2)$$

$$b_{22} = I_{\ell_2} + m_{\ell_2} \cdot \ell_2^2$$

- Γενικά, ισχύει η

$$\mu_1 \cdot I_{n \times n} \leq B(q) \leq \mu_2 \cdot I_{n \times n}$$

για $(\mu_1, \mu_2) = (\lambda_{\min}, \lambda_{\max})$ ιδιοτιμές του $B(q)$



$$\lambda_{\min} = 6.2399$$

$$\lambda_{\max} = 161.2601$$

Παράδειγμα – 4 (επόμενο θέμα ?)

Αξιοσημείωτες Ιδιότητες του Δυναμικού Μοντέλου τύπου E-L: **ο πίνακας Αδράνειας**

- Αν θεωρήσουμε $M_1 \leq \|B(q)\|_1 \leq M_2$, τότε επειδή
$$\|B(q)\|_1 = \left| I_{\ell_1} + m_{\ell_1} \ell_1^2 + I_{\ell_2} + m_{\ell_2} (a_1^2 + \ell_2^2 + 2a_1 \ell_2 \cos \vartheta_2) \right| + \left| I_{\ell_2} + m_{\ell_2} (\ell_2^2 + a_1 \ell_2 \cos \vartheta_2) \right|$$
- Συνάγουμε ότι ...
$$M_1 = I_{\ell_1} + m_{\ell_1} \ell_1^2 + 2I_{\ell_2} + m_{\ell_2} (a_1^2 + 2\ell_2^2)$$
$$M_2 = I_{\ell_1} + m_{\ell_1} \ell_1^2 + 2I_{\ell_2} + m_{\ell_2} (a_1^2 + 2\ell_2^2 + 3a_1 \ell_2)$$
- Με χρήση των αριθμητικών τιμών των χαρακτηριστικών του βραχίονα

$$M_1 = 117.5 \quad M_2 = 192.5 \quad \|B\|_1 = 192.5 \quad \|B\|_2 = 161.25 \quad \|B\|_\infty = 192.5$$

Παράδειγμα – 4 (επόμενο θέμα ?)

Αξιοσημείωτες Ιδιότητες του Δυναμικού Μοντέλου
τύπου E-L: ο όρος Φυγόκεντρων & Coriolis

- Επειδή $C(q, \dot{q})\dot{q} = \begin{bmatrix} -m_{\ell_2} a_1 \ell_2 \sin \vartheta_2 \cdot (2\dot{\vartheta}_1 \dot{\vartheta}_2 + \dot{\vartheta}_2^2) & m_{\ell_2} a_1 \ell_2 \sin \vartheta_2 \cdot \dot{\vartheta}_1^2 \end{bmatrix}^T$

- Προφανώς

$$\|C(q, \dot{q}) \cdot \dot{q}\| = \left| m_{\ell_2} a_1 \ell_2 \sin \vartheta_2 \cdot (2\dot{\vartheta}_1 \dot{\vartheta}_2 + \dot{\vartheta}_2^2) \right| + \left| m_{\ell_2} a_1 \ell_2 \sin \vartheta_2 \cdot \dot{\vartheta}_1^2 \right|$$

- Επίσης $\leq m_{\ell_2} a_1 \ell_2 \cdot |2\dot{\vartheta}_1 \dot{\vartheta}_2 + \dot{\vartheta}_2^2 + \dot{\vartheta}_1^2| \leq m_{\ell_2} a_1 \ell_2 \cdot (|\dot{\vartheta}_1| + |\dot{\vartheta}_2|)^2 = p_c \cdot \|\dot{q}\|^2$

$$N(q, \dot{q}) = \dot{B}(q) - 2 \cdot C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 2 \cdot h \cdot \dot{\vartheta}_2 & h \cdot \dot{\vartheta}_2 \\ h \cdot \dot{\vartheta}_2 & 0 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} h \cdot \dot{\vartheta}_2 & h \cdot (\dot{\vartheta}_1 + \dot{\vartheta}_2) \\ -h \cdot \dot{\vartheta}_1 & 0 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & -2 \cdot h \cdot \dot{\vartheta}_1 - h \cdot \dot{\vartheta}_2 \\ 2 \cdot h \cdot \dot{\vartheta}_1 + h \cdot \dot{\vartheta}_2 & 0 \end{bmatrix}$$



$$N(q, \dot{q}) = -N^T(q, \dot{q})$$

$$h = -m_{\ell_2} \cdot a_1 \cdot \ell_2 \cdot s_2$$

Παράδειγμα – 4 (επόμενο θέμα ?)

Αξιοσημείωτες Ιδιότητες του Δυναμικού Μοντέλου τύπου
E-L : Γραμμικότητα ως προς Γεωμετρικές & Μηχανικές
Παραμέτρους

- Ξεκινώντας από τις Δυναμικές Εξισώσεις E – L :
$$\begin{aligned} & \left[I_{\ell_1} + m_{\ell_1} \ell_1^2 + I_{\ell_2} + m_{\ell_2} (a_1^2 + \ell_2^2 + 2a_1 \ell_2 \cos \vartheta_2) \right] \ddot{\vartheta}_1 + \left[I_{\ell_2} + m_{\ell_2} (\ell_2^2 + a_1 \ell_2 \cos \vartheta_2) \right] \ddot{\vartheta}_2 \\ & \quad - 2 \cdot m_{\ell_2} a_1 \ell_2 \sin \vartheta_2 \cdot \dot{\vartheta}_1 \dot{\vartheta}_2 - m_{\ell_2} a_1 \ell_2 \sin \vartheta_2 \cdot \dot{\vartheta}_2^2 = \tau_1 \\ & \left[I_{\ell_2} + m_{\ell_2} (\ell_2^2 + a_1 \ell_2 \cos \vartheta_2) \right] \ddot{\vartheta}_1 + \left(I_{\ell_2} + m_{\ell_2} \ell_2^2 \right) \ddot{\vartheta}_2 + m_{\ell_2} a_1 \ell_2 \sin \vartheta_2 \cdot \dot{\vartheta}_1^2 = \tau_2 \end{aligned}$$
- Θέλουμε να το θέσουμε στη μορφή

$$Y(q, \dot{q}, \ddot{q}) \cdot \pi = \tau$$

Παράδειγμα – 4 (επόμενο θέμα ?)

Αξιοσημείωτες Ιδιότητες του Δυναμικού Μοντέλου τύπου
E-L : Γραμμικότητα ως προς Γεωμετρικές & Μηχανικές
Παραμέτρους

- Μπορούμε να θεωρήσουμε

- τις μεταβλητές που συνιστούν το διάνυσμα π
αγνώστων παραμέτρων, και

$$\pi = \begin{bmatrix} m_{\ell_1} \ell_1^2 + I_{\ell_1} & m_{\ell_2} & m_{\ell_2} \ell_2 & m_{\ell_2} \ell_2^2 + I_{\ell_2} \end{bmatrix}^T$$

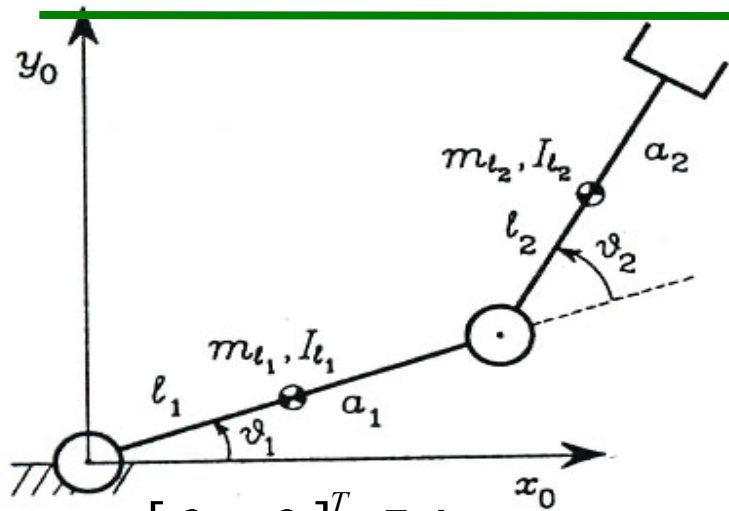
- τα στοιχεία y_{ij} του πίνακα $Y(q, \dot{q}, \ddot{q}) \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$ δηλαδή

$$y_{11} = \ddot{\vartheta}_1 \quad y_{12} = a_1^2 \ddot{\vartheta}_1 \quad y_{14} = y_{24} = \ddot{\vartheta}_1 + \ddot{\vartheta}_2$$

$$y_{13} = a_1 \cos \vartheta_2 (\ddot{\vartheta}_1 + \ddot{\vartheta}_2) - 2 \cdot a_1 \sin \vartheta_2 \cdot (\dot{\vartheta}_1 + \dot{\vartheta}_2) \dot{\vartheta}_2$$

$$y_{21} = y_{22} = 0 \quad y_{23} = a_1 (\cos \vartheta_2 \cdot \ddot{\vartheta}_1 + \sin \vartheta_2 \cdot \dot{\vartheta}_1^2)$$

Παράδειγμα – 5

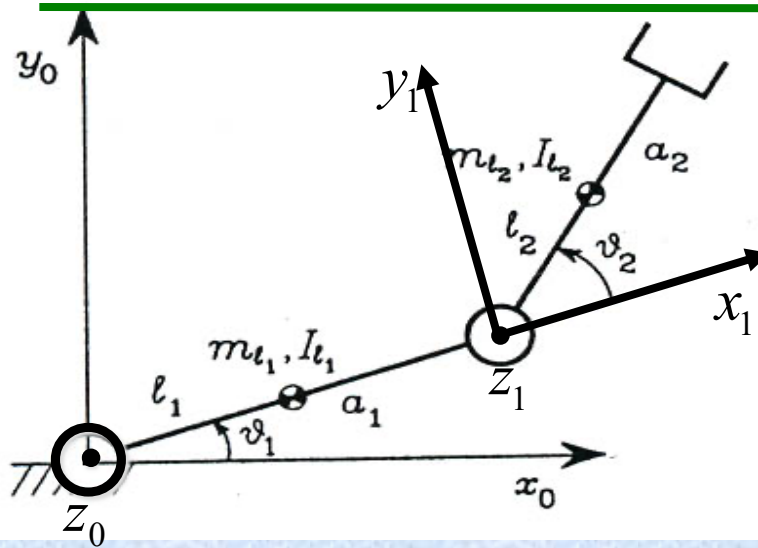


Κατακόρυφος Βραχίονας 2 DOF, με κινητήρες

- Δυναμική Euler-Lagrange
- Πιστοποίηση Ιδιοτήτων Πινάκων
- “Υ-π” μορφή

- $q = [\vartheta_1 \quad \vartheta_2]^T$: διάνυσμα των γενικευμένων συντεταγμένων
- a_1, a_2 : μήκη των συνδέσμων 1 και 2, αντίστοιχα
- ℓ_1, ℓ_2 : αποστάσεις των κέντρων μάζας των δύο συνδέσμων από τους αντίστοιχους άξονες περιστροφής
- m_{ℓ_1}, m_{ℓ_2} : μάζες των δύο συνδέσμων
- m_{m_1}, m_{m_2} : μάζες των κινουμένων μερών των δύο κινητήρων
- I_{m_1}, I_{m_2} : ροπές αδράνειας των κινητήρων ως προς τους άξονες περιστροφής τους
- I_{ℓ_1}, I_{ℓ_2} : ροπές αδράνειας των συνδέσμων ως προς τα κέντρα μάζας τους αντίστοιχα
- $p_{m_i} = p_{i-1}, z_{m_i} = z_{i-1}, \quad i = 1, 2$: οι κινητήρες βρίσκονται τοποθετημένοι στους άξονες των αρθρώσεων, με Κ.Μ. τοποθετημένα στις αντίστοιχες αρχές των συστημάτων

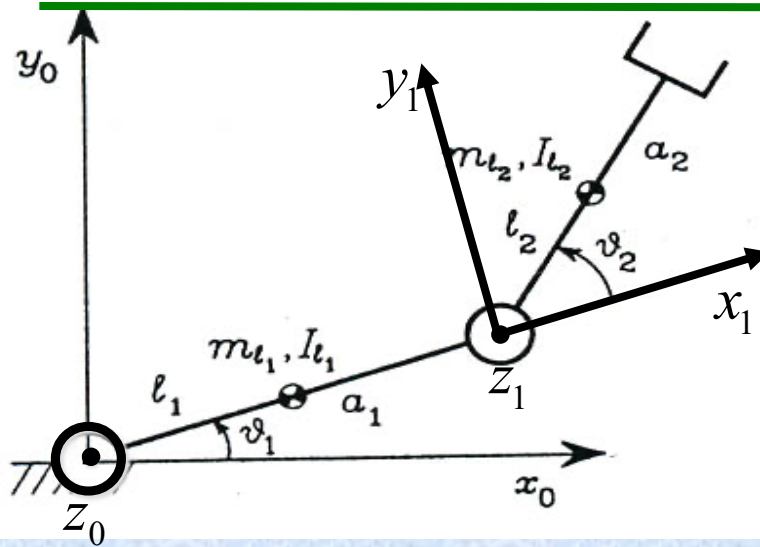
Παράδειγμα 5:



$$\begin{aligned} & (I_{\ell_1} + m_{\ell_1} \ell_1^2 + k_{r_1}^2 I_{m_1} + I_{\ell_2} + m_{\ell_2} (a_1^2 + \ell_2^2 + 2a_1 \ell_2 c_2) + I_{m_2} + m_{m_2} a_1^2) \ddot{\vartheta}_1 + \\ & \quad + (I_{\ell_2} + m_{\ell_2} (\ell_2^2 + a_1 \ell_2 c_2) + k_{r_2} I_{m_2}) \ddot{\vartheta}_2 - \\ & - 2 \cdot m_{\ell_2} a_1 \ell_2 s_2 \dot{\vartheta}_1 \dot{\vartheta}_2 - m_{\ell_2} a_1 \ell_2 s_2 \dot{\vartheta}_2^2 + (m_{\ell_1} \ell_1 + m_{m_2} a_1 + m_{\ell_2} a_1) g c_1 + m_{\ell_2} \ell_2 g c_{12} = \tau_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (I_{\ell_2} + m_{\ell_2} (\ell_2^2 + a_1 \ell_2 c_2) + k_{r_2} I_{m_2}) \ddot{\vartheta}_1 + (I_{\ell_2} + m_{\ell_2} \ell_2^2 + k_{r_2}^2 I_{m_2}) \ddot{\vartheta}_2 + \\ & \quad + m_{\ell_2} a_1 \ell_2 s_2 \dot{\vartheta}_1^2 + m_{\ell_2} \ell_2 g c_{12} = \tau_2 \end{aligned}$$

Παράδειγμα 5: *Μητρώο Αδρανείας*



$$B(q) = \begin{bmatrix} b_{11}(\vartheta_2) & b_{12}(\vartheta_2) \\ b_{21}(\vartheta_2) & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$b_{11} = I_{\ell_1} + m_{\ell_1} \cdot \ell_1^2 + k_{r_1}^2 \cdot I_{m_1} + I_{\ell_2} + m_{\ell_2} \cdot (a_1^2 + \ell_2^2 + 2 \cdot a_1 \cdot \ell_2 \cdot c_2) + I_{m_2} + m_{m_2} \cdot a_1^2$$

$$b_{12} = b_{21} = I_{\ell_2} + m_{\ell_2} \cdot (\ell_2^2 + a_1 \cdot \ell_2 \cdot c_2) + k_{r_2} \cdot I_{m_2}$$

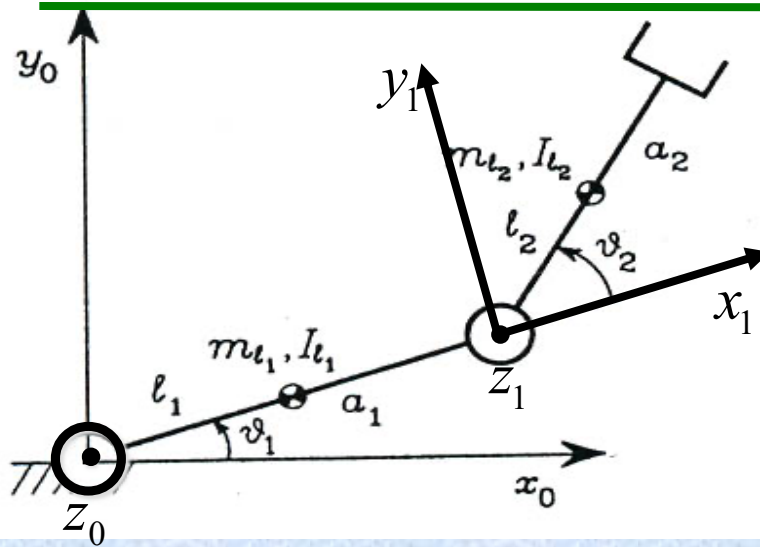
$$b_{22} = I_{\ell_2} + m_{\ell_2} \cdot \ell_2^2 + k_{r_2}^2 \cdot I_{m_2}$$



$$B(q) = B^T(q)$$

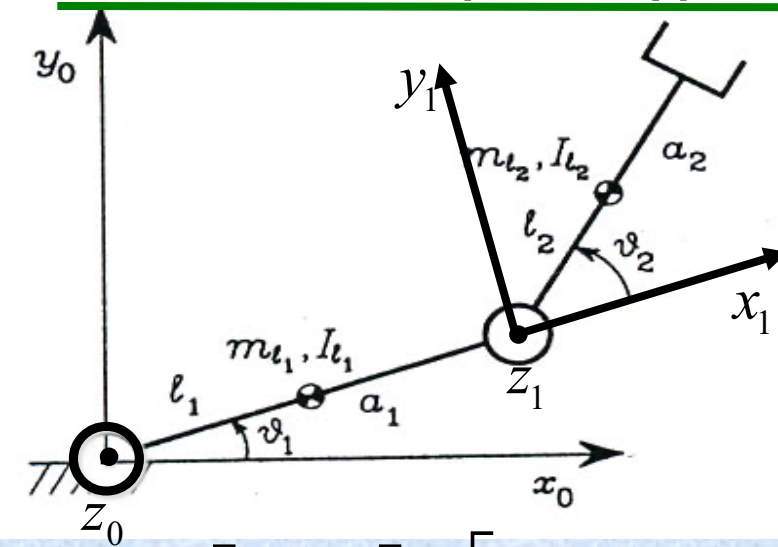
Το **μητρώο αδράνειας** είναι προφανώς **συμμετρικό** και (μπορεί να αποδειχθεί εύκολα ότι) είναι **θετικά ορισμένο**.

Παράδειγμα 5: *Μητρώο Φυγόκεντρων & Coriolis*



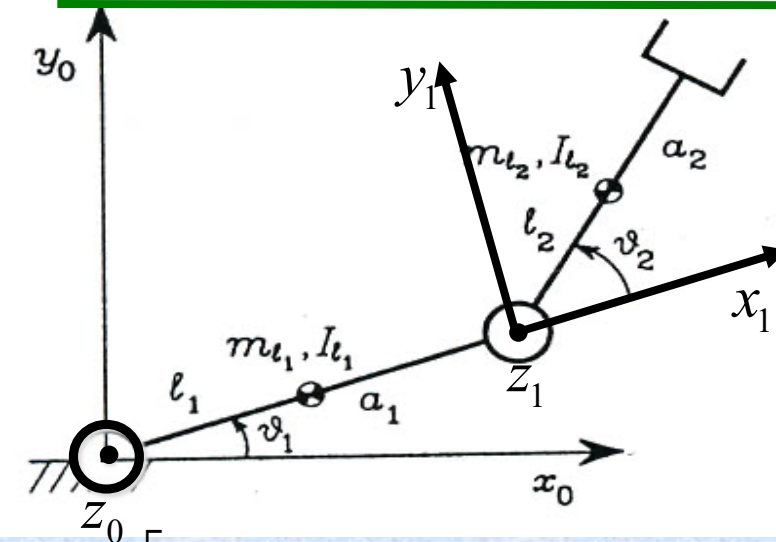
$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} -m_{\ell_2} \cdot a_1 \cdot \ell_2 \cdot s_2 \cdot \dot{\vartheta}_2 & -m_{\ell_2} \cdot a_1 \cdot \ell_2 \cdot s_2 \cdot (\dot{\vartheta}_1 + \dot{\vartheta}_2) \\ m_{\ell_2} \cdot a_1 \cdot \ell_2 \cdot s_2 \cdot \dot{\vartheta}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 5: *Διάνυσμα Βαρύτητας*



$$\begin{aligned}
 G(q) &= \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (m_{l_1} \cdot \ell_1 + m_{m_2} \cdot a_1 + m_{l_2} \cdot a_1) \cdot g \cdot c_1 + m_{l_2} \cdot \ell_2 \cdot g \cdot c_{12} \\ m_{l_2} \cdot \ell_2 \cdot g \cdot c_{12} \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} (m_{l_1} \cdot \ell_1 + m_{m_2} \cdot a_1 + m_{l_2} \cdot a_1) \cdot c_1 + m_{l_2} \cdot \ell_2 \cdot c_{12} \\ m_{l_2} \cdot \ell_2 \cdot c_{12} \end{bmatrix} \cdot g
 \end{aligned}$$

Παράδειγμα 5: Δυναμική



$$B(q) \cdot \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \cdot \dot{q} + g(q) = \tau$$

$$B(q) = \begin{bmatrix} I_{\ell_1} + m_{\ell_1} \ell_1^2 + k_{r_1}^2 I_{m_1} + I_{\ell_2} + m_{\ell_2} (a_1^2 + \ell_2^2 + 2a_1 \ell_2 c_2) + I_{m_2} + m_{m_2} a_1^2 & I_{\ell_2} + m_{\ell_2} (\ell_2^2 + a_1 \ell_2 c_2) + k_{r_2} I_{m_2} \\ I_{\ell_2} + m_{\ell_2} (\ell_2^2 + a_1 \ell_2 c_2) + k_{r_2} I_{m_2} & I_{\ell_2} + m_{\ell_2} \ell_2^2 + k_{r_2}^2 I_{m_2} \end{bmatrix}$$

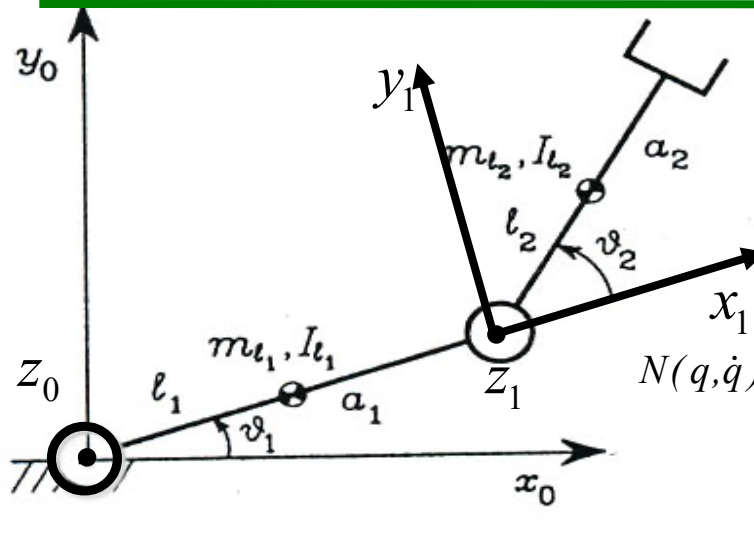
$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} h \cdot \dot{\vartheta}_2 & h \cdot (\dot{\vartheta}_1 + \dot{\vartheta}_2) \\ -h \cdot \dot{\vartheta}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G(q) = \begin{bmatrix} (m_{\ell_1} \ell_1 + m_{m_2} a_1 + m_{\ell_2} a_1) g c_1 + m_{\ell_2} \ell_2 g c_{12} \\ m_{\ell_2} \ell_2 g c_{12} \end{bmatrix}$$



$$\begin{aligned} & (I_{\ell_1} + m_{\ell_1} \ell_1^2 + I_{\ell_2} + m_{\ell_2} (a_1^2 + \ell_2^2 + 2a_1 \ell_2 c_2) + k_{r_1}^2 I_{m_1} + I_{m_2} + m_{m_2} a_1^2) \ddot{\vartheta}_1 + (I_{\ell_2} + m_{\ell_2} (\ell_2^2 + a_1 \ell_2 c_2) + k_{r_2} I_{m_2}) \ddot{\vartheta}_2 \\ & - 2 \cdot m_{\ell_2} a_1 \ell_2 s_2 \dot{\vartheta}_1 \dot{\vartheta}_2 - m_{\ell_2} a_1 \ell_2 s_2 \dot{\vartheta}_2^2 + (m_{\ell_1} \ell_1 + m_{\ell_2} a_1) g c_1 + m_{\ell_2} \ell_2 g c_{12} = \tau_1 \\ & (I_{\ell_2} + m_{\ell_2} (\ell_2^2 + a_1 \ell_2 c_2) + k_{r_2} I_{m_2}) \ddot{\vartheta}_1 + (I_{\ell_2} + m_{\ell_2} \ell_2^2 + k_{r_2}^2 I_{m_2}) \ddot{\vartheta}_2 + m_{\ell_2} a_1 \ell_2 s_2 \dot{\vartheta}_1^2 + m_{\ell_2} \ell_2 g c_{12} = \tau_2 \end{aligned}$$

Παράδειγμα 5: *Αξιοσημείωτες Ιδιότητες Δυναμικού Μοντέλου*



Αντισυμμετρικότητα
Πίνακα

$$N(q, \dot{q}) = \dot{B}(q) - 2 \cdot C(q, \dot{q})$$

$$N(q, \dot{q}) = \dot{B}(q) - 2 \cdot C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 2 \cdot h \cdot \dot{\vartheta}_2 & h \cdot \dot{\vartheta}_2 \\ h \cdot \dot{\vartheta}_2 & 0 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} h \cdot \dot{\vartheta}_2 & h \cdot (\dot{\vartheta}_1 + \dot{\vartheta}_2) \\ -h \cdot \dot{\vartheta}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

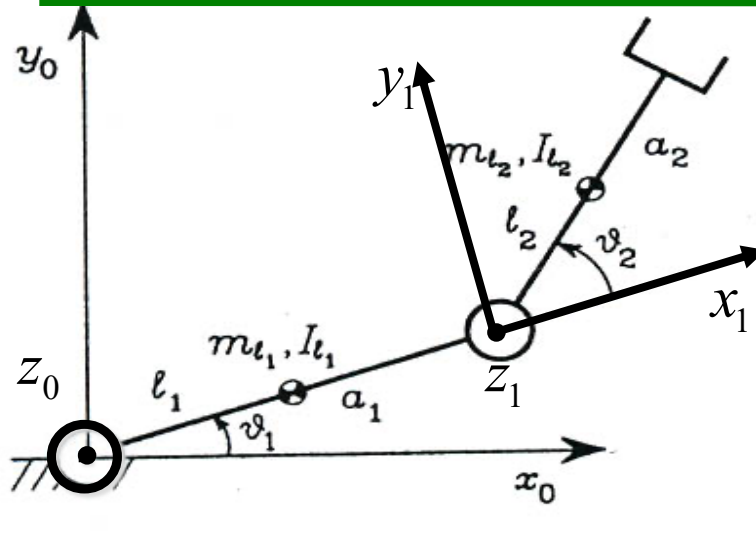
$$= \begin{bmatrix} 0 & -2 \cdot h \cdot \dot{\vartheta}_1 - h \cdot \dot{\vartheta}_2 \\ 2 \cdot h \cdot \dot{\vartheta}_1 + h \cdot \dot{\vartheta}_2 & 0 \end{bmatrix}$$



$$N(q, \dot{q}) = -N^T(q, \dot{q})$$

$$h = -m_{\ell_2} \cdot a_1 \cdot \ell_2 \cdot s_2$$

Παράδειγμα 5: *Αξιοσημείωτες Ιδιότητες Δυναμικού Μοντέλου*



Γραμμικότητα ως προς τις δυναμικές παραμέτρους

$$Y(q, \dot{q}, \ddot{q}) \cdot \pi = \tau$$

$$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{18} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{28} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \vdots \\ \pi_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$$

$$y_{11} = a_1^2 \ddot{\vartheta}_2 + a_1 g c_1$$

$$y_{12} = 2a_1 \ddot{\vartheta}_1 + g c_1$$

$$y_{13} = \ddot{\vartheta}_1$$

$$y_{14} = k_{r_1}^2 \ddot{\vartheta}_1$$

$$y_{15} = (a_1^2 + 2a_1 a_2 c_2 + a_2^2) \ddot{\vartheta}_1 + (a_1 a_2 c_2 + a_2^2) \ddot{\vartheta}_2 - 2a_1 a_2 s_2 \dot{\vartheta}_1 \dot{\vartheta}_2 - a_1 a_2 s_2 \dot{\vartheta}_2^2 + a_1 g c_1 + a_2 g c_{12}$$

$$y_{16} = (2a_1 c_2 + 2a_2) \ddot{\vartheta}_1 + (a_1 c_2 + 2a_2) \ddot{\vartheta}_2 - 2a_1 s_2 \dot{\vartheta}_1 \dot{\vartheta}_2 - a_1 s_2 \dot{\vartheta}_2^2 + g c_{12}$$

$$y_{17} = y_{27} = \ddot{\vartheta}_1 + \ddot{\vartheta}_2$$

$$y_{18} = \ddot{\vartheta}_1 + k_{r_2} \ddot{\vartheta}_2$$

$$y_{21} = y_{22} = y_{23} = y_{24} = 0$$

$$y_{25} = (a_1 a_2 c_2 + a_2^2) \ddot{\vartheta}_1 + a_2^2 \ddot{\vartheta}_2 + a_1 a_2 s_2 \dot{\vartheta}_1^2 + a_2 g c_{12}$$

$$y_{26} = (a_1 c_2 + 2a_2) \ddot{\vartheta}_1 + 2a_2 \ddot{\vartheta}_2 + a_1 s_2 \dot{\vartheta}_1^2 + g c_{12}$$

$$y_{28} = k_{r_2} \ddot{\vartheta}_1 + k_{r_2}^2 \ddot{\vartheta}_2$$

$$\pi_1 = m_{\ell_1} + m_{m_2}$$

$$\pi_2 = m_{\ell_1} (\ell_1 - a_1)$$

$$\pi_3 = I_{\ell_1} + m_{\ell_1} (\ell_1 - a_1)^2 + I_{m_2}$$

$$\pi_4 = I_{m_1}$$

$$\pi_5 = m_{\ell_2}$$

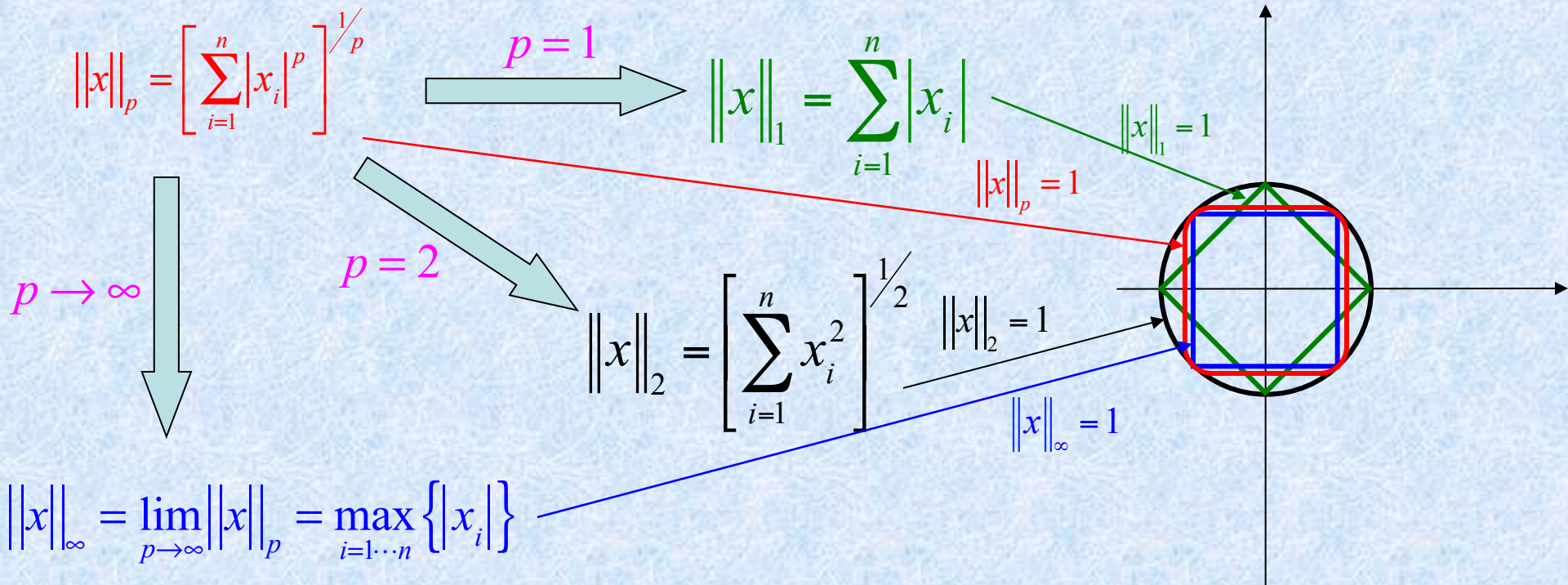
$$\pi_6 = m_{\ell_2} (\ell_2 - a_2)$$

$$\pi_7 = I_{\ell_2} + m_{\ell_2} (\ell_2 - a_2)^2$$

$$\pi_8 = I_{m_2}$$

Μαθηματική Επανάληψη: Νόρμες Διανυσμάτων

Η νόρμα ενός διανύσματος $x = [x_1 x_2 \cdots x_n]^T \in R^n$ μπορεί να θεωρηθεί ως ένα «μέτρο» έκφρασης του «μεγέθους» του



Μαθηματική Επανάληψη: Νόρμες Πινάκων

Η p -νόρμα ενός πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ παριστά την ελάχιστη “αυξομείωση” που θα προκαλέσει στο μέγεθος (εκφρασμένου με την m -νόρμα) οιοδήποτε στοιχείου $x = [x_1 x_2 \cdots x_n]^T \in \mathbb{R}^n$ ο Πολλαπλασιασμός με τον A

$$\|A\|_p = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{\|A \cdot x\|_p}{\|x\|_p}$$

