Ομάδα Ασκήσεων #2 –Λύσεις

Πρόβλημα #1

Ο προσπελάσιμος χώρος εργασίας είναι ένας κυκλικός δακτύλιος $(0 \le \theta_1, \theta_2 \le 2\pi)$. Το πάχος (ύψος) του δακτυλίου είναι ίσο με το εύρος μετατόπισης της πρισματικής άρθρωσης. Ο χώρος επιδεξιότητας είναι κενός (διάσταση = 0).

(Σκεφτείτε την περίπτωση όπου, $0 \le \theta_1 \le 180^\circ$ και $-90^\circ \le \theta_2 \le 180^\circ$).

Πρόβλημα #2

Έστω ότι δίνεται ο παρακάτω πίνακας περιστροφής

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0.616 & 0.75 & 0.433 \\ -0.75 & 0.625 & -0.2165 \\ -0.433 & -0.2165 & 0.875 \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

(i) Γωνίες Euler (ZYX) ή 3-2-1

$$\mathbf{R}_{ZYX}(\alpha, \beta, \gamma) = \mathbf{R}_{z_0}(\alpha)\mathbf{R}_{y_1}(\beta)\mathbf{R}_{x_2}(\gamma) \tag{2.2}$$

Θεωρώντας

$$c_\beta > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\pi / 2 < \beta < \pi / 2 \tag{2.3}$$

προκύπτουν οι παρακάτω γωνίες Euler (ZYX), που αντιστοιχούν στο δοσμένο πίνακα περιστροφής:

$$\begin{aligned} \beta &= A\tan 2\,(-r_{31}, \sqrt{r_{11}^2 + r_{21}^2}) = A\tan 2\,(0.433, \sqrt{0.616^2 + 0.75^2}) = 24^\circ \\ \alpha &= A\tan 2\,(r_{21} / c\beta, r_{11} / c\beta) = A\tan 2\,(-0.75, 0.616) = -50.6^\circ \\ \gamma &= A\tan 2\,(r_{32} / c\beta, r_{33} / c\beta) = A\tan 2\,(-0.2165, 0.875) = -13.9^\circ \end{aligned} \tag{2.4}$$

(ii) Γωνίες Euler (ZYZ) ή 3-2-3

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{ZYZ}(\alpha, \beta, \gamma) = \mathbf{R}_{z_0}(\alpha)\mathbf{R}_{y_1}(\beta)\mathbf{R}_{z_2}(\gamma) &= \begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 \\ s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c\gamma & -s\gamma & 0 \\ s\gamma & c\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} c_\alpha c_\beta c_\gamma - s_\alpha s_\gamma & -c_\alpha c_\beta s_\gamma - s_\alpha c_\gamma & c_\alpha s_\beta \\ s_\alpha c_\beta c_\gamma + c_\alpha s_\gamma & -s_\alpha c_\beta s_\gamma + c_\alpha c_\gamma & s_\alpha s_\beta \\ -s_\beta c_\gamma & s_\beta s_\gamma & c_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.5}$$

Οπότε θεωρώντας

$$s_\beta > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < \beta < \pi \tag{2.6}$$

προκύπτουν οι παρακάτω γωνίες Euler (ZYZ), που αντιστοιχούν στο δοσμένο πίνακα περιστροφής:

$$\begin{aligned}
&\beta = A\tan 2\,(\sqrt{r_{13}^2 + r_{23}^2},\, r_{33}) = A\tan 2\,(\sqrt{0.433^2 + 0.2165^2},\, 0.875) = 28.95^\circ \\
&\alpha = A\tan 2\,(r_{23} \,/\, s_\beta,\, r_{13} \,/\, s_\beta) = A\tan 2\,(-0.2165,\, 0.433) = -26.57^\circ \\
&\gamma = A\tan 2\,(r_{32} \,/\, s_\beta,\, -r_{31} \,/\, s_\beta) = A\tan 2\,(-0.2165,\, 0.433) = -26.57^\circ
\end{aligned} \tag{2.7}$$

(iii) Ισοδύναμο ζεύγος Γωνίας-Άξονα περιστροφής

$$\begin{aligned}
&\theta = \cos^{-1}\left(\frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{0.616 + 0.625 + 0.875 - 1}{2}\right) = 56.08^\circ \\
&\mathbf{k} = \frac{1}{2\sin\theta}\begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{2\sin(56.08^\circ)}\begin{bmatrix} -0.2165 + 0.2165 \\ 0.433 + 0.433 \\ -0.75 - 0.75 \end{bmatrix} = [0.0,\, 0.522,\, -0.904]^T
\end{aligned} \tag{2.8}$$

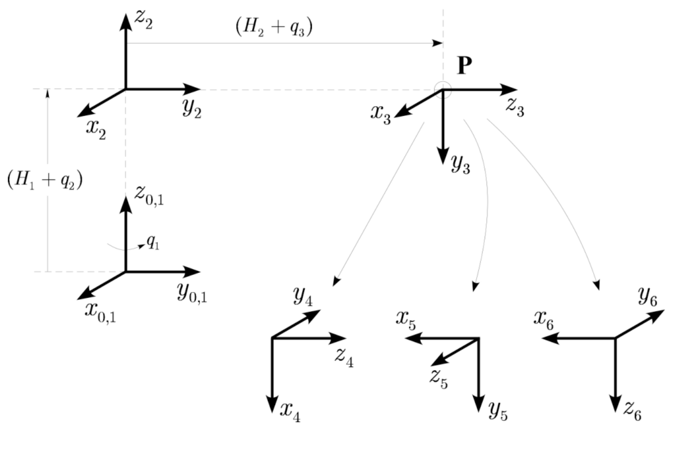
(iv) Παράμετροι Euler

$$\mathbf{e} = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3]^T = \mathbf{k}^T \sin(\tfrac{\theta}{2}), \quad \varepsilon_4 = \cos(\tfrac{\theta}{2}) \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= k_x \sin(\tfrac{\theta}{2}) = 0.0 \\
\varepsilon_2 &= k_y \sin(\tfrac{\theta}{2}) = 0.245 \\
\varepsilon_3 &= k_z \sin(\tfrac{\theta}{2}) = -0.425 \\
\varepsilon_4 &= \cos(\tfrac{\theta}{2}) = 0.883
\end{aligned}$$

Πρόβλημα #3

(α) Συστήματα συντεταγμένων



Σχήμα 2-1. ΣΣ για το βραχίονα του προβλήματος #3.

- Οι άξονες $\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ επιλέχθηκαν παράλληλοι προς τον $\mathbf{x}_1$, έτσι ώστε $(\theta_2, \theta_3) \equiv 0$.
- Ο $\mathbf{x}_4 \perp \mathbf{z}_4$ για $q_4 = 90^\circ$
- Ο $\mathbf{x}_5 \perp \mathbf{z}_5$ για $q_5 = -90^\circ$

- Ο $\mathbf{x}_6 \perp (\mathbf{z}_5, \mathbf{z}_6)$ για $q_6 = 0^\circ$

(β) Ο βραχίονας έχει έξι (6) Β.Ε. και οι D-H παράμετροί του δίνονται στον ακόλουθο πίνακα.

Link-(i)	**α_{i-1} (twist)**	**a_{i-1} (length)**	**d_i**	**θ_i**
1	0	0	0	q_1
2	0	0	H_1+q_2	0
3	-90^o	0	H_2+q_3	0
4	0	0	0	q_4
5	90^o	0	0	q_5
6	-90^o	0	0	q_6

(γ) Ομογενείς Μετασχηματισμοί:

$$
{}^0\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad {}^1\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & H_1 + q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^2\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & H_2 + q_3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad {}^3\mathbf{T}_4 = \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 & 0 \\ s_4 & c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^4\mathbf{T}_5 = \begin{bmatrix} c_5 & -s_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s_5 & c_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad {}^5\mathbf{T}_6 = \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s_6 & -c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

(δ)

$$
{}^0\mathbf{T}_2 = {}^0\mathbf{T}_1\,{}^1\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & H_1 + q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad {}^0\mathbf{T}_3 = {}^0\mathbf{T}_2\,{}^2\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & -(H_2 + q_3)s_1 \\ s_1 & 0 & c_1 & (H_2 + q_3)c_1 \\ 0 & -1 & 0 & H_1 + q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^0\mathbf{T}_4 = {}^0\mathbf{T}_3\,{}^3\mathbf{T}_4 = \begin{bmatrix} c_1c_4 & -c_1s_4 & -s_1 & -(H_2 + q_3)s_1 \\ s_1c_4 & -s_1s_4 & c_1 & (H_2 + q_3)c_1 \\ -s_4 & -c_4 & 0 & H_1 + q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$ {}^0\mathbf{T}_5 = {}^0\mathbf{T}_4\,{}^4\mathbf{T}_5 = \begin{bmatrix} c_1c_4c_5 - s_1s_5 & -c_1c_4s_5 - s_1c_5 & c_1s_4 & -(H_2+q_3)s_1 \\ s_1c_4c_5 + c_1s_5 & -s_1c_4s_5 + c_1c_5 & s_1s_4 & (H_2+q_3)c_1 \\ -s_4c_5 & s_4s_5 & c_4 & H_1+q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^0\mathbf{T}_6 = {}^0\mathbf{T}_5\,{}^5\mathbf{T}_6 = \begin{bmatrix} (c_1c_4c_5 - s_1s_5)c_6 - c_1s_4s_6 & -(c_1c_4c_5 - s_1s_5)s_6 - c_1s_4c_6 & -c_1c_4s_5 - s_1c_5 & -(H_2+q_3)s_1 \\ (s_1c_4c_5 + c_1s_5)c_6 - s_1s_4s_6 & -(s_1c_4c_5 + c_1s_5)s_6 - s_1s_4c_6 & -s_1c_4s_5 + c_1c_5 & (H_2+q_3)c_1 \\ -s_4c_5c_6 - c_4s_6 & s_4c_5s_6 - c_4c_6 & s_4s_5 & H_1+q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Και τελικά:

$$ {}^0\mathbf{T}_E = {}^0\mathbf{T}_6\,{}^6\mathbf{T}_E, \quad {}^6\mathbf{T}_E = \begin{bmatrix} & & & 0 \\ & \mathbf{I}_3 & & 0 \\ & & & H_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^6\mathbf{T}_E = \begin{bmatrix} & & & H_3(-c_1c_4s_5 - s_1c_5) - (H_2+q_3)s_1 \\ & {}^0\mathbf{R}_6 & & H_3(-s_1c_4s_5 + c_1c_5) + (H_2+q_3)c_1 \\ & & & H_3s_4s_5 + H_1 + q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Πρόβλημα #4

(α) Απ΄τον ${}^0\mathbf{T}_3$ που υπολογίστηκε στην προηγούμενη άσκηση, έχουμε:

$$ x = -(H_2 + q_3)s_1 \tag{2.10} $$

$$ y = (H_2 + q_3)c_1 \tag{2.11} $$

$$ z = H_1 + q_2 \tag{2.12} $$

Απ΄την Εξ. (2.12), παίρνουμε:

$$ q_2 = z - H_1 \tag{2.13} $$

Υψώνοντας στο τετράγωνο και προσθέτοντας τις (2.10) και (2.11), παίρνουμε:

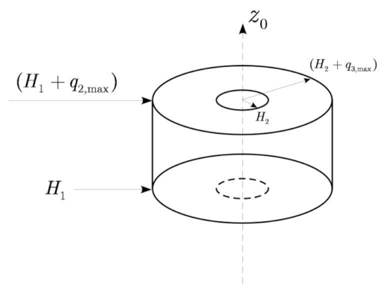
$$ \begin{aligned} & x^2 + y^2 = (H_2 + q_3)^2 \quad \Rightarrow \\ & q_3 = \sqrt{x^2 + y^2} - H_2 \end{aligned} \tag{2.14} $$

Απ΄τις (2.10) και (2.11), έχουμε:

$$ q_1 = A\tan 2\left(\tfrac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \tfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \tag{2.15} $$

(β) Αν η επιθυμητή θέση βρίσκεται εντός του προσπελάσιμου χώρου εργασίας, υπάρχει πάντα μοναδική λύση (στο αντίστροφο κινηματικό πρόβλημα).

(γ) Ο προσπελάσιμος χώρος εργασίας είναι ένας τόρος με ορθογωνική διατομή (κύλινδρος με διαμπερή κυλινδρική ομοαξονική οπή), όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα. Το ύψος και η εξωτερική ακτίνα, εξαρτώνται απ΄το εύρος των πρισματικών αρθρώσεων.



Σχήμα 2-2. Προσπελάσιμος χώρος εργασίας για τον βραχίονα του προβλήματος #4.

(δ) Για τη δεδομένη (επιθυμητή) θέση P, του άκρου, έχουμε:

$$ {}^{3}\mathbf{R}_{6} = {}^{0}\mathbf{R}_{3}^{-1}\,{}^{0}\mathbf{R}_{6} \tag{2.16}$$

$$ {}^{0}\mathbf{R}_{3} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 \\ s_1 & 0 & c_1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad {}^{0}\mathbf{R}_{3}^{-1} = {}^{0}\mathbf{R}_{3}^{T} = \begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -s_1 & c_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.17}$$

όπου

$$ q_1 = A\tan 2\,\Big(\frac{-b_x}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2}}, \frac{b_y}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2}}\Big) \tag{2.18}$$

(έχει υπολογισθεί από το ερώτημα(α)).

Επομένως

$$ {}^{3}\mathbf{R}_{6} = {}^{0}\mathbf{R}_{3}^{-1}\,{}^{0}\mathbf{R}_{6} = {}^{0}\mathbf{R}_{3}^{-1} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11}^{*} & r_{12}^{*} & r_{13}^{*} \\ r_{21}^{*} & r_{22}^{*} & r_{23}^{*} \\ r_{31}^{*} & r_{32}^{*} & r_{33}^{*} \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

Είναι επίσης

$$ {}^{3}\mathbf{R}_{6} = {}^{3}\mathbf{R}_{4}\,{}^{4}\mathbf{R}_{5}\,{}^{5}\mathbf{R}_{6} = \begin{bmatrix} c_4c_5c_6 - s_4s_6 & -c_4c_5s_6 - s_4c_6 & -c_4s_5 \\ s_4c_5c_6 + c_4s_6 & -s_4c_5s_6 + c_4c_6 & -s_4s_5 \\ s_5c_6 & -s_5s_6 & c_5 \end{bmatrix} \tag{2.20}$$

Εξισώνοντας τις (2.19) και (2.20), έχουμε:

$$ q_5 = A\tan 2\,\big(\sqrt{r_{31}^{*2} + r_{32}^{*2}},\, r_{33}^{*}\big) \tag{2.21}$$

Αν $\sin(q_5) \equiv s_5 \neq 0$, έχουμε επίσης:

$$
\begin{aligned}
q_4 &= A\tan 2\,(\frac{-r_{23}^*}{s_5},\frac{-r_{13}^*}{s_5}) \\
q_6 &= A\tan 2\,(\frac{-r_{32}^*}{s_5},\frac{r_{31}^*}{s_5})
\end{aligned} \tag{2.22}
$$

Αν $s_5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad q_5 = 0^\circ, 180^\circ$, η λύση εκφυλίζεται. Στην περίπτωση αυτή μπορεί να υπολογισθεί μόνο το άθροισμα ή η διαφορά των q_4, q_6. Μια δυνατή σύμβαση είναι να επιλέξουμε $q_4 = 0.0$ (δηλ. να κρατήσουμε ακίνητη την άρθρωση 4) οπότε παίρνουμε:

- Για $q_5 = 0^\circ$: $\quad q_4 = 0, \quad q_6 = A\tan 2\,(-r_{12}^*, r_{11}^*)$
- Για $q_5 = 180^\circ$: $\quad q_4 = 0, \quad q_6 = A\tan 2\,(r_{12}^*, -r_{11}^*)$

Πρόβλημα #5

$$
\begin{aligned}
{}^0\mathbf{V}_E &= \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{v}_E \\ {}^0\boldsymbol{\omega}_E \end{bmatrix}_{6\times 1} = {}^0\mathbf{J}_V(\mathbf{q})\,\dot{\mathbf{q}} \\
{}^0\mathbf{J}_V &= ?
\end{aligned} \tag{2.23}
$$

Για τον RPPRRR βραχίονα, έχουμε:

$$
{}^0\mathbf{J}_V = \begin{bmatrix} \left({}^0\mathbf{z}_1\right)^\times {}^0\mathbf{p}_E^1 & {}^0\mathbf{z}_2 & {}^0\mathbf{z}_3 & \left({}^0\mathbf{z}_4\right)^\times {}^0\mathbf{p}_E^4 & \left({}^0\mathbf{z}_5\right)^\times {}^0\mathbf{p}_E^5 & \left({}^0\mathbf{z}_6\right)^\times {}^0\mathbf{p}_E^6 \\ {}^0\mathbf{z}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & {}^0\mathbf{z}_4 & {}^0\mathbf{z}_5 & {}^0\mathbf{z}_6 \end{bmatrix} \tag{2.24}
$$

όπου

$$
{}^0\mathbf{z}_i = {}^0\mathbf{R}_i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \tag{2.25}
$$

και

$$
{}^0\mathbf{p}_E^i = {}^0\mathbf{p}_E - {}^0\mathbf{p}_i \tag{2.26}
$$

Έτσι απ΄ τους αντίστοιχους ομογενείς μετασχηματισμούς ${}^0\mathbf{T}_i$, που υπολογίστηκαν στο πρόβλημα #3, παίρνουμε:

$$
{}^0\mathbf{z}_1 = {}^0\mathbf{z}_2 = [0 \quad 0 \quad 1]^T \tag{2.27}
$$

$$
{}^0\mathbf{z}_3 = {}^0\mathbf{z}_4 = [-s_1 \quad c_1 \quad 0]^T \tag{2.28}
$$

$$
{}^0\mathbf{z}_5 = [c_1 s_4 \quad s_1 s_4 \quad c_4]^T \tag{2.29}
$$

$$
{}^0\mathbf{z}_6 = [-c_1 c_4 s_5 - s_1 c_5 \quad -s_1 c_4 s_5 + c_1 c_5 \quad s_4 s_5]^T \tag{2.30}
$$

και

$$
{}^{0}\mathbf{p}_E^1 = \begin{Bmatrix} H_3(-c_1c_4s_5 - s_1c_5) - (H_2 + q_3)s_1 \\ H_3(-s_1c_4s_5 + c_1c_5) + (H_2 + q_3)c_1 \\ H_3s_4s_5 + H_1 + q_2 \end{Bmatrix} \tag{2.31}
$$

$$
{}^{0}\mathbf{p}_E^4 = \begin{Bmatrix} H_3(-c_1c_4s_5 - s_1c_5) \\ H_3(-s_1c_4s_5 + c_1c_5) \\ H_3s_4s_5 \end{Bmatrix} \tag{2.32}
$$

$$
\begin{aligned} {}^{0}\mathbf{p}_E^5 &= {}^{0}\mathbf{p}_E^4 \\ {}^{0}\mathbf{p}_E^6 &= {}^{0}\mathbf{p}_E^4 \end{aligned} \tag{2.33}
$$

Οπότε τελικά, είναι:

$$
{}^{0}\mathbf{J}_V = \begin{bmatrix} \begin{matrix} H_3(s_1c_4s_5 - c_1c_5) - \\ -(H_2 + q_3)c_1 \end{matrix} & 0 & -s_1 & H_3c_1s_4s_5 & H_3(s_1s_5 - c_1c_4c_5) & 0 \\ \begin{matrix} H_3(-c_1c_4s_5 - s_1c_5) - \\ -(H_2 + q_3)s_1 \end{matrix} & 0 & c_1 & H_3s_1s_4s_5 & H_3(-c_1s_5 - s_1c_4c_5) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & H_3c_4s_5 & H_3s_4c_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s_1 & c_1s_4 & -c_1c_4s_5 - s_1c_5 \\ 0 & 0 & 0 & c_1 & s_1s_4 & -s_1c_4s_5 + c_1c_5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & c_4 & s_4s_5 \end{bmatrix} \tag{2.34}
$$