

Ομάδα Ασκήσεων #1-Λύσεις

Πρόβλημα #1

- (α) Τουλάχιστον 3 B.E. (Βαθμοί Ελευθερίας) χρειάζονται για αυθαίρετη τοποθέτηση στο χώρο (x,y,z) και επιπλέον 3 B.E. απαιτούνται για αυθαίρετο προσανατολισμό (στη δεδομένη θέση), έτσι συνολικά απαιτούνται 6 B.E. Αν δεν ενδιαφέρει η περιστροφή γύρω από έναν άξονα, τότε ένας κατάλληλα σχεδιασμένος βραχίονας 5 B.E. μπορεί να επιτελέσει το έργο.
- (β) Διάνυσμα θέσης:

- Θέση άκρου ως προς τη βάση
- Δύναμη που ασκείται από το άκρο σε ένα αντικείμενο
- Κάποια παραλλαγή των παραπάνω, π.χ. θέση του κέντρου μάζας (στερεού σώματος) στον Καρτεσιανό Χώρο

Ελεύθερο διάνυσμα:

- Μόνο η κατεύθυνση και το μέτρο του διανύσματος έχουν σημασία (όχι η θέση). Παραδείγματα: Ταχύτητα, επιτάχυνση, γωνιακή ταχύτητα, γωνιακή επιτάχυνση, ροπή, γραμμική ορμή, στροφορμή, απειροστή στροφή, ...

- (γ) Σχετικός προσανατολισμός: Απαιτούνται 2 ΣΣ.

- (δ) Στήλες του ${}^A\mathbf{R}_B$: Είναι οι προβολές των μοναδιαίων διανυσμάτων $\hat{\mathbf{x}}_B, \hat{\mathbf{y}}_B, \hat{\mathbf{z}}_B$ του δεξιόστροφου ΣΣ $(Oxyz)_B$, στα μοναδιαία διανύσματα $\hat{\mathbf{x}}_A, \hat{\mathbf{y}}_A, \hat{\mathbf{z}}_A$ του δεξιόστροφου ΣΣ $(Oxyz)_A$, δηλ.

$${}^A\mathbf{R}_B = \begin{bmatrix} {}^A\hat{\mathbf{x}}_B & {}^A\hat{\mathbf{y}}_B & {}^A\hat{\mathbf{z}}_B \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

Γραμμές του ${}^A\mathbf{R}_B$: Είναι (παρόμοια) οι προβολές των $\hat{\mathbf{x}}_A, \hat{\mathbf{y}}_A, \hat{\mathbf{z}}_A$ στο ΣΣ $(Oxyz)_B$, δηλ.

$${}^A\mathbf{R}_B = \begin{bmatrix} {}^B\hat{\mathbf{x}}_A^T \\ {}^B\hat{\mathbf{y}}_A^T \\ {}^B\hat{\mathbf{z}}_A^T \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

- (ε) Έστω ότι το $SO(3)$ παριστάνει το σύνολο των συνηθισμένων ("δεξιόστροφων") πινάκων περιστροφής, με ιδιότητες :

$$\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I} \quad (1.3)$$

$$\det(\mathbf{R}) = +1, \quad (\text{proper rotation matrix}) \quad (1.4)$$

Θέλουμε να δείξουμε την ακόλουθη πρόταση:

$$(\mathbf{R}_i \in SO(3), \forall n \geq 1) \Rightarrow \prod_{i=1}^n \mathbf{R}_i \in SO(3) \quad (1.5)$$

Για $n = 1$: $\mathbf{R}_1 \in SO(3)$, ισχύει από (1.5).

Έστω ότι η πρόταση ισχύει για $n = k$, δηλαδή (υπόθεση)

$$\tilde{\mathbf{R}} = \prod_{i=1}^k \mathbf{R}_i \in SO(3) \Leftrightarrow (\tilde{\mathbf{R}}^T \tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{I} \quad \kappa\alpha\iota \quad \det(\tilde{\mathbf{R}}) = +1) \quad (1.6)$$

Αρκεί να δείξουμε ότι η πρόταση (1.5) ισχύει για $n = k + 1$, δηλ. ότι είναι

$$\prod_{i=1}^{k+1} \mathbf{R}_i = \tilde{\mathbf{R}} \mathbf{R}_{k+1} \in SO(3) \quad (1.7)$$

Ελέγχουμε αν ο παραπάνω πίνακας έχει τις ιδιότητες των πινάκων περιστροφής. Πρώτη ιδιότητα (1.3):

$$(\tilde{\mathbf{R}} \mathbf{R}_{k+1})^T \tilde{\mathbf{R}} \mathbf{R}_{k+1} = \mathbf{R}_{k+1}^T \tilde{\mathbf{R}}^T \tilde{\mathbf{R}} \mathbf{R}_{k+1} = \mathbf{R}_{k+1}^T \mathbf{R}_{k+1} = \mathbf{I}$$

Δεύτερη ιδιότητα (1.4):

$$\det(\tilde{\mathbf{R}} \mathbf{R}_{k+1}) = \det(\tilde{\mathbf{R}}) \det(\mathbf{R}_{k+1}) = 1 \cdot 1 = 1$$

Άρα η (1.7) ισχύει και επομένως έχει αποδειχθεί επαγωγικά ότι:

Το γινόμενο αυθαίρετου πλήθους πινάκων περιστροφής, δίνει πίνακα περιστροφής.

Πρόβλημα #2

$$(\alpha) \quad {}^A \mathbf{R}_B = \mathbf{R}_{\chi}(\theta) \mathbf{R}_y(\phi) = \begin{bmatrix} c\phi & 0 & s\phi \\ s\theta s\phi & c\theta & -s\theta c\phi \\ -c\theta s\phi & s\theta & c\theta c\phi \end{bmatrix}$$

$$(\beta) \quad {}^A \mathbf{R}_B = \mathbf{R}_{x_A}(\phi) \mathbf{R}_{y'_A}(\theta), \quad \mu\epsilon \quad \mathbf{y}'_A = \mathbf{R}_{x_B}(\phi) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{R}_{x_A}(\phi) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(\gamma) \quad {}^A \mathbf{T}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & {}^A \mathbf{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^A \mathbf{R}_B & {}^A \mathbf{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^A \mathbf{R}_B & 2 \cdot {}^A \mathbf{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(\delta) \quad {}^A \mathbf{T}_B = \begin{bmatrix} & 0 \\ {}^A \mathbf{R}_B & 0 \\ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & {}^B \mathbf{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^A \mathbf{R}_B & {}^A \mathbf{R}_B {}^B \mathbf{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Πρόβλημα #3

$$(α) \quad {}^0\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} {}^0\hat{\mathbf{x}}_1 & {}^0\hat{\mathbf{y}}_1 & {}^0\hat{\mathbf{z}}_1 \end{bmatrix}$$

$$\det({}^0\mathbf{R}_1) = {}^0\hat{\mathbf{z}}_1 \cdot ({}^0\hat{\mathbf{x}}_1 \times {}^0\hat{\mathbf{y}}_1) = {}^0\hat{\mathbf{z}}_1 \cdot {}^0\hat{\mathbf{z}}_1 = {}^0\hat{\mathbf{z}}_1^T {}^0\hat{\mathbf{z}}_1 = \|{}^0\hat{\mathbf{z}}_1\|^2 = +1$$

(β) Έστω λ κάποια ιδιοτιμή (πραγματική ή μιγαδική) του πίνακα περιστροφής $\mathbf{R}$ και $\mathbf{e}$ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα. Θα ισχύει

$$\mathbf{R}\mathbf{e} = \lambda\mathbf{e} \quad (1.8)$$

Σημείωση: Ο Ερμιτιανός Ανάστροφος ενός πίνακα $\mathbf{A}$ (με μιγαδικά, γενικά, στοιχεία) συμβολίζεται με $\mathbf{A}^H$ και ορίζεται ως $\mathbf{A}^H = \mathbf{A}^{*T}$. Είναι ο ανάστροφος του συζυγούς (δεν παίζει ρόλο η σειρά των τελεστών *,T). Αν ο πίνακας $\mathbf{A}$ είναι πραγματικός, τότε $\mathbf{A}^H \equiv \mathbf{A}^T$.

Παίρνοντας τον Ερμιτιανό Ανάστροφο και των δυο μελών της (1.8), έχουμε:

$$(\mathbf{R}\mathbf{e})^H = (\lambda\mathbf{e})^H \Leftrightarrow \mathbf{e}^H \mathbf{R}^H = \mathbf{e}^H \lambda^H \Leftrightarrow \mathbf{e}^H \mathbf{R}^T = \lambda^* \mathbf{e}^H \quad (1.9)$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις (1.8) και (1.9), παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^H \mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{e} &= \lambda^* \mathbf{e}^H \lambda \mathbf{e} \Leftrightarrow \mathbf{e}^H \mathbf{e} = |\lambda|^2 \mathbf{e}^H \mathbf{e} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \|\mathbf{e}\|^2 &= |\lambda|^2 \|\mathbf{e}\|^2 \Leftrightarrow |\lambda|^2 = 1, \quad \gamma\iota\alpha \|\mathbf{e}\| \neq 0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

Δηλαδή το μέτρο των ιδιοτιμών του πίνακα περιστροφής είναι μονάδα. Επομένως ο $\mathbf{R}(3 \times 3)$, θα έχει μια πραγματική ιδιοτιμή και δύο συζυγείς μιγαδικές (ως μη ιδιόμορφος):

$$\lambda_1 \in \mathbb{R}, \quad |\lambda_1| = 1 \quad (1.11)$$

$$\lambda_{2,3} = e^{\pm j\theta} = \cos(\theta) \pm j \sin(\theta), \quad |\lambda_{2,3}| = 1 \quad (1.12)$$

Η ορίζουσα όμως ενός πίνακα, δίνεται απ' το γινόμενο των ιδιοτιμών του, οπότε:

$$\det(\mathbf{R}) = +1 \Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = +1 \Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_2 \lambda_2^* = +1 \Leftrightarrow \lambda_1 |\lambda_2|^2 = +1 \Leftrightarrow \lambda_1 = +1 \quad (1.13)$$

Επομένως το (+1) είναι μια ιδιοτιμή του πίνακα περιστροφής.

Το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα (έστω $\hat{\mathbf{k}}$) θα επαληθεύει την

$$\mathbf{R}\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{k}} \quad (1.14)$$

Το $\hat{\mathbf{k}}$ αντιπροσωπεύει τον άξονα περιστροφής (που αντιστοιχεί στον $\mathbf{R}$) αφού παραμένει αναλλοίωτο από την περιστροφή του από αυτόν.

Έχουμε επίσης:

$$\text{trace}(\mathbf{R}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 + 2\cos(\theta) = \text{trace}(\mathbf{R}(\hat{\mathbf{k}}, \theta)) \quad (1.15)$$

Επομένως το θ των μιγαδικών ιδιοτιμών, που δίνονται απ' την (1.12), αντιστοιχεί στη γωνία περιστροφής περί $\hat{\mathbf{k}}$, που οδηγεί στον $\mathbf{R}$.

$$(γ) \quad \mathbf{R}_z(\alpha) = \begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 \\ s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

$$\mathbf{R}_y(\beta) = \begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

$$\mathbf{R}_x(\gamma) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\gamma & -s\gamma \\ 0 & s\gamma & c\gamma \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

Euler (ZYX):

$$\begin{aligned} {}^0\mathbf{R}_3 &= \mathbf{R}_{z_0}(\theta_3)\mathbf{R}_{y_1}(\theta_2)\mathbf{R}_{x_2}(\theta_1) = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 \\ s_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 & 0 & s_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_2 & 0 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & -s_1 \\ 1 & s_1 & c_1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} c_3c_2 & -s_3c_1 + c_3s_2s_1 & s_1s_3 + c_1s_2c_3 \\ s_3c_2 & c_3c_1 + s_3s_2s_1 & -s_1c_3 + c_1s_2s_3 \\ -s_2 & c_2s_1 & c_1c_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.19)$$

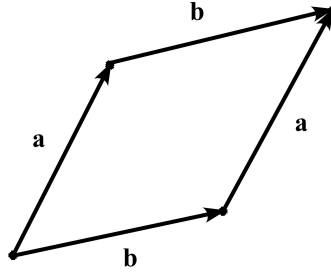
Οι τρεις στήλες του ${}^0\mathbf{R}_3$, παριστάνουν τις συνιστώσες των προβολών των μοναδιαίων $\hat{\mathbf{x}}_3, \hat{\mathbf{y}}_3, \hat{\mathbf{z}}_3$ (του $\Sigma\Sigma$ που προκύπτει μετά τις τρεις παραπάνω περιστροφές) ως προς το $\Sigma\Sigma$ βάσης $(Oxyz)_0$, είναι δηλαδή

$${}^0\mathbf{R}_3 = \begin{bmatrix} {}^0\hat{\mathbf{x}}_3 & {}^0\hat{\mathbf{y}}_3 & {}^0\hat{\mathbf{z}}_3 \end{bmatrix} \quad (1.20)$$

(δ) Οι μετατοπίσεις είναι αντιμεταθετικές. Δηλαδή μια μετατόπιση πρώτα κατά $\mathbf{a}$ και μετά κατά $\mathbf{b}$, οδηγεί στο ίδιο σημείο μ' αυτό που θα οδηγούμασταν αν συνέβαινε πρώτα η μετατόπιση κατά $\mathbf{b}$ και ακολούθως η $\mathbf{a}$. Οι μετατοπίσεις μπορούν να παρασταθούν από διανύσματα, βλ. και Σχ. 1-1:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a} \quad (1.21)$$

Σε αντίθεση με τα παραπάνω, οι περιστροφές, δεν μπορούν να παρασταθούν από διανύσματα. Παριστάνονται με πίνακες περιστροφής. Αν οι περιστροφές μπορούσαν να παρασταθούν από διανύσματα, θα ήταν αντιμεταθετικές, δηλαδή



Σχήμα 1-1. Μετατοπίσεις (αντιμεταθετικές)

$$\mathbf{R}_x(\theta_1)\mathbf{R}_z(\theta_3) = \mathbf{R}_z(\theta_3)\mathbf{R}_x(\theta_1)$$

δύο διαδοχικές περιστροφές ως προς το ίδιο αδρανειακό ΣΣ αλλά με διαφορετική σειρά θα οδηγούσαν στον ίδιο πίνακα περιστροφής, πράγμα που δεν ισχύει:

$$\mathbf{R}_x(\theta_1)\mathbf{R}_z(\theta_3) = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 \\ c_1 s_3 & c_1 c_3 & -s_1 \\ s_1 s_3 & s_1 c_3 & c_1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} c_3 & -c_1 s_3 & s_1 s_3 \\ s_3 & c_1 c_3 & -s_1 c_3 \\ 0 & s_1 & c_1 \end{bmatrix} = \mathbf{R}_z(\theta_3)\mathbf{R}_x(\theta_1) \quad (1.22)$$

- Αυθαίρετες μη-απειροστές περιστροφές, δεν είναι γενικά αντιμεταθέσιμες.

Για τις απειροστές περιστροφές όμως, όπου $\theta_i \ll 1$, είναι:

$$\cos(\theta_i) \rightarrow 1, \quad \sin(\theta_i) \rightarrow \theta_i, \quad \theta_i^n \rightarrow 0 \quad (n \geq 2) \quad (1.23)$$

οπότε το παραπάνω παράδειγμα γίνεται:

$$\mathbf{R}_x \mathbf{R}_z = \begin{bmatrix} 1 & -\theta_3 & 0 \\ \theta_3 & 1 & -\theta_1 \\ \underbrace{\theta_1 \theta_3}_{\approx 0} & \theta_1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\theta_3 & \underbrace{\theta_1 \theta_3}_{\approx 0} \\ \theta_3 & 1 & -\theta_1 \\ 0 & \theta_1 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{R}_z \mathbf{R}_x$$

Έτσι για απειροστές στροφές, η ιδιότητα της αντιμετάθεσης ισχύει και μπορούμε να παραστήσουμε τέτοιες περιστροφές με διανύσματα:

$$\delta\theta = \begin{bmatrix} \delta\theta_x \\ \delta\theta_y \\ \delta\theta_z \end{bmatrix} \Rightarrow \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta\theta}{\delta t} = \omega = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (1.24)$$

Γ' αυτό και η γωνιακή ταχύτητα μπορεί να παρασταθεί ως διάνυσμα.

(ε) Δύο ή περισσότερες (πεπερασμένες) περιστροφές είναι αντιμεταθέσιμες, αν όλες συμβαίνουν γύρω απ' την ίδια ευθεία στο χώρο (δηλ. αν μπορούν όλες να εκφραστούν ως θετικές ή αρνητικές περιστροφές γύρω απ' τον ίδιο άξονα στο χώρο). Π.χ.

$$\mathbf{R}_x(\theta_1)\mathbf{R}_x(\theta_2) = \mathbf{R}_x(\theta_2)\mathbf{R}_x(\theta_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{12} & -s_{12} \\ 0 & s_{12} & c_{12} \end{bmatrix}$$

ή

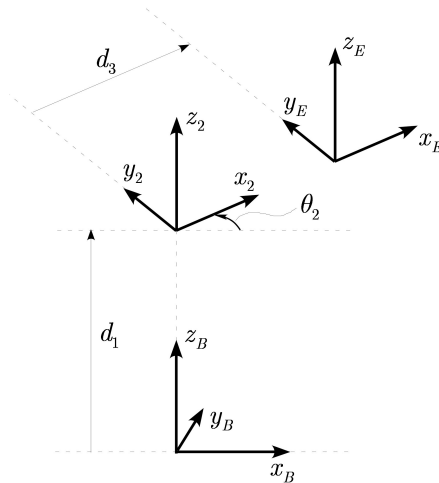
$$\mathbf{R}_x(\theta_1)\mathbf{R}_{-x}(-\theta_2) \Rightarrow \mathbf{R}_x(\theta_1)\mathbf{R}_x(\theta_2) = \mathbf{R}_x(\theta_2)\mathbf{R}_x(\theta_1)$$

(Bonus: Αποδείξτε ότι $\mathbf{R}_{k_1}(\theta_1)\mathbf{R}_{k_2}(\theta_2) = \mathbf{R}_{k_2}(\theta_2)\mathbf{R}_{k_1}(\theta_1) \Leftrightarrow \hat{\mathbf{k}}_1 \times \hat{\mathbf{k}}_2 = 0$).

Πρόβλημα #4

- Ρομπότ κυλινδρικών συντεταγμένων

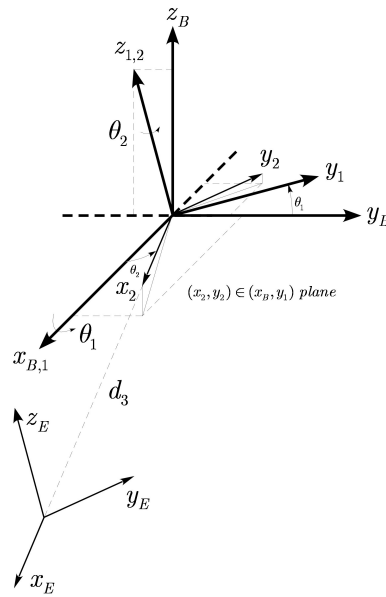
Προσαρτούμε ΣΣ στη Βάση, σε κάθε ενδιάμεσο Σύνδεσμο και στο Άκρο, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα (η σύμβαση Denavit - Hartenberg (D-H) δε χρησιμοποιήθηκε εδώ). Μεταβλητές αρθρώσεων: $\{d_1, \theta_2, d_3\}$.



Σχήμα 1-2. Ρομπότ κυλινδρικών συντεταγμένων.

$$\begin{aligned} {}^B\mathbf{T}_E &= \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{(prismatic)} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{z_B}(\theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{(revolute)} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I} & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{(prismatic)} = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{z_B}(\theta_2) & c_2 d_3 & s_2 d_3 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.25)$$

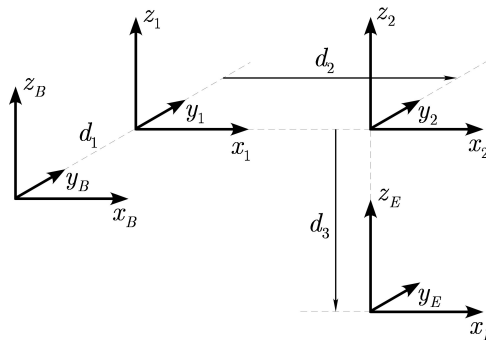
- Ρομπότ σφαιρικών συντεταγμένων



Σχήμα 1-3. Ρομπότ σφαιρικών συντεταγμένων

$$\begin{aligned}
 {}^B\mathbf{T}_E &= \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{x_B}(\theta_1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{(revolute)} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{z_1}(\theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{(revolute)} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I} & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{(prismatic)} = \\
 &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_x(\theta_1)\mathbf{R}_z(\theta_2) & c_2 d_3 \\ 0 & c_1 s_2 d_3 \\ 0 & s_1 s_2 d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{1.26}$$

- Ρομπότ καρτεσιανών συντεταγμένων



Σχήμα 1-4. Ρομπότ καρτεσιανών συντεταγμένων.

$${}^B\mathbf{T}_E = \begin{bmatrix} & & d_2 \\ & \mathbf{I} & d_1 \\ & & -d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.27)$$

Εξετάζοντας τα στοιχεία που σχετίζονται με τις περιστροφές στους παραπάνω ομογενείς μετασχηματισμούς, μπορούμε να δούμε ότι η διάσταση των χώρων των προσανατολισμών που μπορούν να επιτευχθούν είναι αντίστοιχα ένα, δύο και μηδέν (σταθερός προσανατολισμός) για τα κυλινδρικά, σφαιρικά και καρτεσιανά ρομπότ. Αν η θέση του άκρου καθορισθεί, ο χώρος των επιτεύξιμων προσανατολισμών (και για τα τρία ρομπότ) περιορίζεται σε ένα συγκεκριμένο προσανατολισμό.

Πρόβλημα #5

(α) Από παρατήρηση των αντίστοιχων ΣΣ, έχουμε:

$${}^0\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & L \\ -1 & 0 & 0 & L \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^0\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & L \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & L \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & L \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & L \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

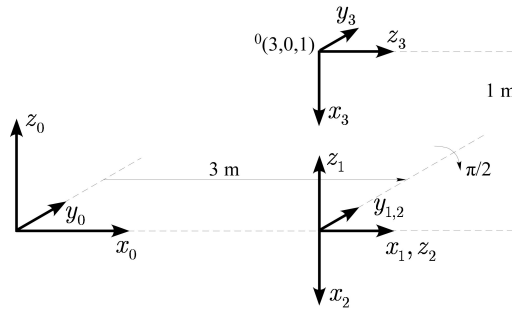
(Ελέγξτε ότι ${}^0\mathbf{T}_1 {}^1\mathbf{T}_2 = {}^0\mathbf{T}_2$).

(β)

$${}^2\mathbf{T}_3 = {}^1\mathbf{T}_2^{-1} {}^1\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} {}^1\mathbf{R}_2^T & -{}^1\mathbf{R}_2^T \mathbf{p}_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -0.6123 & 0.6123 & -0.5000 & 7.2461 \\ -0.7071 & -0.7071 & 0 & 0 \\ -0.3535 & 0.3535 & 0.8660 & 15.7310 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(γ) ${}^0\mathbf{T}_3 = \text{Transl}_z(1) \text{Transl}_x(3) \text{Rot}_y(\pi/2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$



Σχήμα 1-5.

(δ) Άξονας περιστροφής:

$$\hat{\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{p} \times \mathbf{p}'}{\|\mathbf{p} \times \mathbf{p}'\|} = [0.156, -0.937, 0.312]$$

Γωνία:

$$\theta = \arccos\left(\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}'}{\|\mathbf{p}\| \|\mathbf{p}'\|}\right) = \arccos \frac{7.7781}{9} = 30.2^\circ$$

Αντίστοιχος πίνακας περιστροφής:

$$\mathbf{R}_{\hat{\mathbf{k}}}(\theta) = \underbrace{\mathbf{I}_3 \cos \theta + \hat{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{k}}^T (1 - \cos \theta)}_{\text{symmetric}} + \underbrace{\hat{\mathbf{k}}^x \sin \theta}_{\text{skew-symmetric}} \quad (1.28)$$

$$\hat{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{bmatrix} \Rightarrow \hat{\mathbf{k}}^x = \begin{bmatrix} 0 & -k_z & k_y \\ k_z & 0 & -k_x \\ -k_y & k_x & 0 \end{bmatrix} \quad (1.29)$$

Και τελικά,

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0.8675 & -0.1770 & -0.4648 \\ 0.1373 & 0.9834 & -0.1183 \\ 0.4780 & 0.0388 & 0.8775 \end{bmatrix}$$

(Ελέγξτε ότι $\mathbf{p}' = \mathbf{R}\mathbf{p}$).

Σημείωση

(Σχετικά με τους πίνακες περιστροφής και την έκφρασή τους σε διαφορετικά ΣΣ).

Έστω ${}^A\mathbf{R}_B^C$ πίνακας περιστροφής που δίνει τη στροφή του ΣΣ {B} ως προς το {C} εκφρασμένος στο ΣΣ {A}. Αν τα {A} και {C} ταυτίζονται ή έχουν τον ίδιο προσανατολισμό, γράφουμε απλά: ${}^C\mathbf{R}_B$.

Παρακάτω παρουσιάζεται η διαφορά μεταξύ πινάκων περιστροφής που εκφράζονται σε διαφορετικά ΣΣ και παράγεται η σχέση για τη μετατροπή βάσης του πίνακα.

Έστω ότι γνωρίζουμε τον προσανατολισμό του ΣΣ {B} ως προς το {A} (εκφρασμένο στο {A}), δηλ. τον ${}^A\mathbf{R}_B$ (π.χ. ο προσανατολισμός του άκρου ως προς τη βάση ενός βραχίονα).

Έστω επίσης ότι γνωρίζουμε τον προσανατολισμό του ΣΣ {C} ως προς το {A} (εκφρασμένο στο {A}), δηλ. τον ${}^A\mathbf{R}_C$ (π.χ. ο επιθυμητός προσανατολισμός του άκρου ως προς τη βάση).

Θέλουμε να βρούμε τον πίνακα περιστροφής $\Delta\mathbf{R} = \mathbf{R}_C^B$ που οδηγεί απ' το {B} -> {C}.

- $\Delta\mathbf{R}$ εκφρασμένος στο {B}:

Για διαδοχικές περιστροφές ως προς το τρέχον ΣΣ, πολλαπλασιάζουμε διαδοχικά (προς τα δεξιά) τους αντίστοιχους πίνακες περιστροφής, έτσι έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} {}^A\mathbf{R}_C &= {}^A\mathbf{R}_B {}^B\Delta\mathbf{R} \Leftrightarrow {}^B\Delta\mathbf{R} = ({}^A\mathbf{R}_B)^T {}^A\mathbf{R}_C \\ {}^B\Delta\mathbf{R} &= {}^B\mathbf{R}_A {}^A\mathbf{R}_C = {}^B\mathbf{R}_C = {}^B\mathbf{R}_C^B \end{aligned} \quad (1.30)$$

- $\Delta\mathbf{R}$ εκφρασμένος στο {A}:

Για διαδοχικές περιστροφές ως προς ακίνητο ΣΣ, πολλαπλασιάζουμε διαδοχικά προς τα αριστερά (προ-πολλαπλασιάζουμε) τους αντίστοιχους πίνακες περιστροφής, έτσι έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} {}^A\mathbf{R}_C &= {}^A\Delta\mathbf{R} {}^A\mathbf{R}_B \Leftrightarrow {}^A\Delta\mathbf{R} = {}^A\mathbf{R}_C ({}^A\mathbf{R}_B)^T \\ {}^A\Delta\mathbf{R} &= {}^A\mathbf{R}_B {}^B\mathbf{R}_C ({}^A\mathbf{R}_B)^T = {}^A\mathbf{R}_C^B \end{aligned} \quad (1.31)$$

Απ' τις (1.30) και (1.31), παίρνουμε:

$$\begin{aligned} {}^A\Delta\mathbf{R} &= {}^A\mathbf{R}_B ({}^B\Delta\mathbf{R}) {}^A\mathbf{R}_B^T \\ {}^B\Delta\mathbf{R} &= {}^A\mathbf{R}_B^T ({}^A\Delta\mathbf{R}) {}^A\mathbf{R}_B \end{aligned} \quad (1.32)$$

Πρόβλημα #6

Προσαρτούμε ΣΣ στη Βάση, στο Άκρο, στο Σύστημα Όρασης και στο Φορτίο: {B}, {E}, {V}, {P}.

Γνωρίζουμε:

- Θέση και προσανατολισμό του Άκρου {E} ως προς τη Βάση {B}: ${}^B\mathbf{T}_E$

- Θέση και προσανατολισμό του Φορτίου {P}, ως προς το Σύστημα Όρασης {V}:
 ${}^V\mathbf{T}_P$

Θέλουμε να προσδιορίσουμε την απαιτούμενη αλλαγή του ΣΣ {E}, εκφρασμένη στα ΣΣ {E} και {B}, δηλ. θέλουμε τους ομογενείς μετασχηματισμούς ${}^E\Delta\mathbf{T} = {}^E\mathbf{T}_P^E = {}^E\mathbf{T}_P$ και ${}^B\Delta\mathbf{T} = {}^B\mathbf{T}_P^E$.

(α)

$${}^E\Delta\mathbf{T} = {}^E\mathbf{T}_P = {}^B\mathbf{T}_E^{-1} {}^B\mathbf{T}_V {}^V\mathbf{T}_P$$

Επομένως χρειαζόμαστε επιπλέον τον ${}^B\mathbf{T}_V$.

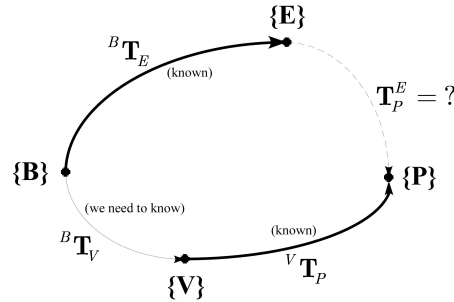
(Η, αν αγνοήσουμε την πληροφορία για τον ${}^B\mathbf{T}_E$ και εκτιμήσουμε τη θέση του ΣΣ {E} με το σύστημα όρασης, θα έχουμε: ${}^E\Delta\mathbf{T} = {}^E\mathbf{T}_P = {}^V\mathbf{T}_E^{-1} {}^V\mathbf{T}_P$, οπότε σ'αυτή την περίπτωση χρειαζόμαστε τον ${}^V\mathbf{T}_E$).

(β) Αφού

$${}^E\Delta\mathbf{T} = {}^E\mathbf{T}_P = \begin{bmatrix} {}^E\mathbf{R}_P & {}^E\mathbf{p}_{payload} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

έχουμε

$${}^B\Delta\mathbf{T} = {}^B\mathbf{T}_P^E = \begin{bmatrix} {}^B\mathbf{R}_E ({}^E\mathbf{R}_P)^B \mathbf{R}_E^T & {}^B\mathbf{R}_E {}^E\mathbf{p}_{payload} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Σχήμα 1-6. Πρόβλημα #6

Προσεγγίσεις βαθμονόμησης, σχετικά με τον ${}^B\mathbf{T}_V$:

- Ο άκρο του βραχίονα πιάνει το σύστημα όρασης και χρησιμοποιούμε τις πληροφορίες απ'τους αισθητήρες θέσης των αρθρώσεων, ώστε τελικά να έχουμε ${}^B\mathbf{T}_E = {}^B\mathbf{T}_V$.

- Μετρούμε θέση και προσανατολισμό της βάσης (με το σύστημα όρασης), οπότε πρέπει ${}^B\mathbf{T}_V = {}^V\mathbf{T}_B^{-1}$.
- Χρησιμοποιούμε άλλα μετρητικά συστήματα ώστε να πάρουμε τον ${}^B\mathbf{T}_V$.