

# **BADANIA SYMULACYJNE STEROWANIA ROBOTEM RÓWNOLEGLYM Z NAPĘDEM HYDRAULICZNYM**

**Ioannis DAVLIAKOS, Evangelos PAPADOPOULOS**

National Technical University of Athens  
Department of Mechanical Engineering  
15780 Athens, Greece

**Janusz FRĄCZEK, Marek WOJTYRA**

Politechnika Warszawska  
Wydział Mechaniczny Energetyki i Lotnictwa  
Instytut Techniki Lotniczej i Mechaniki Stosowanej  
Nowowiejska 24, 00-665 Warszawa

## **1. WPROWADZENIE**

Siłowniki elektrohydrauliczne są często stosowane do napędu manipulatorów równoległych typu platformy Stewarta. Zaletą tego typu napędów jest ich zdolność do wytwarzania dużych sił przy dużych prędkościach ruchu, ich duża trwałość, sztywność i szybkość odpowiedzi na sygnały sterujące. Istotną cechą różniącą napęd hydrauliczny od elektrycznego jest nieproporcjonalność wytwarzanej siły do natężenia prądu sterującego siłownikiem. W rezultacie, układy sterowania zaprojektowane dla robotów z napędem elektrycznym nie mogą być stosowane do robotów napędzanych hydraulicznie. Zwięzły przegląd metod sterowania używanych w przypadku napędów elektrohydraulicznych można znaleźć w [3].

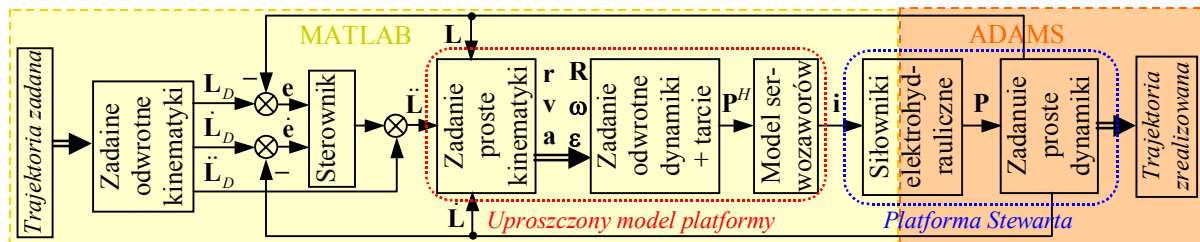
W nowoczesnych konstrukcjach robotów równoległych typu platformy Stewarta coraz częściej odchodzi się od metod sterowania pozycyjnego, stosując sterowanie z modelem dynamiki odwrotnej. Ze względu na dużą częstotliwość taktowania układu sterowania, obliczenia pożądanych sił napędowych muszą być prowadzone bardzo szybko. Z tego właśnie powodu model dynamiki odwrotnej manipulatora wykorzystywany przez układ sterowania robotem jest zazwyczaj uproszczony i nie oddaje zjawisk towarzyszących ruchowi manipulatora w pełnej złożoności.

W przypadku napędu hydraulicznego pojawiają się dodatkowe problemy, wynikające stąd, że siła generowana przez siłownik jest silnie nieliniową funkcją prądu sterującego serwowozorem hydraulicznym. Układ sterowania robotem musi zatem korzystać z modelu obliczeniowego siłownika i serwowozoru podczas wyznaczania wartości sygnałów sterujących. Dodatkowym problemem jest odpowiednio dokładne wyznaczenie parametrów, np. współczynników tarcia, wykorzystywanych przez model obliczeniowy zaimplementowany w układzie sterowania.

Celem prezentowanej pracy było zbadanie, jaki wpływ na osiąganą jakość sterowania wywierają niedokładności modelu dynamiki używanego przez układ sterowania. Niedokładności te mogą wynikać z przyjętych uproszczeń oraz z nieprecyzyjnego oszacowania niektórych parametrów modelu. Przeprowadzone badania pomagają ustalić dopuszczalny stopień uproszczeń modelu dynamiki wykorzystywanego przez układ sterowania oraz określić pożądaną dokładność pomiaru parametrów modelu.

Badania przeprowadzono wykorzystując model symulacyjny manipulatora równoległego wraz z układem napędowym i układem sterowania. Do zbudowania modelu użyto dwóch pakietów przeznaczonych do obliczeń inżynierskich. Pierwszy z nich służy do

modelowania układów wielocłonowych, a drugi do symulacji procesów sterowania. Obliczenia były prowadzone jednocześnie przez dwa współpracujące pakiety.



Rys. 1: Schemat modelu symulacyjnego

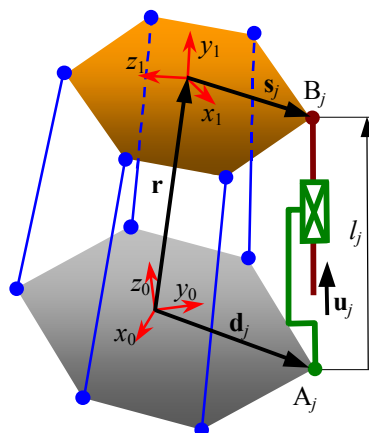
Do modelowania mechanizmu platformy Stewarta użyto pakietu do obliczeń układów wielocłonowych. Program ten w sposób automatyczny układa i rozwiązuje równania ruchu opisujące analizowany układ mechanizm. Dzięki tej właściwości stosunkowo łatwo można wprowadzać zmiany w modelu i uwzględniać czynniki takie jak tarcie w parach kinematycznych, niedokładności wykonania mechanizmu, jego oddziaływanie z otoczeniem itp. Wprowadzanie zmian nie wymaga pracochłonnego wyprowadzania i oprogramowywania. Daleko idące uproszczenia modelu nie są zatem konieczne. Dodatkową korzyścią wynikającą z zastosowania pakietu jest możliwość oglądania animacji manipulatora w ruchu.

Układ sterowania oraz serwozawory elektrohydrauliczne są modelowane w programie do symulacji procesów sterowania. Sterowanie manipulatorem wykorzystuje model jego dynamiki, zachodzi zatem konieczność rozwiązywania zadania odwrotnego dynamiki w każdym kroku sterowania. W obliczeniach siły napędowej uwzględnia się także tarcie występujące w układzie. Wykorzystywany przez układ sterowania model dynamiki manipulatora jest znacznie uproszczony, by umożliwić szybkie obliczenia.

Schemat modelu symulacyjnego przedstawiono na rysunku 1. Warto zwrócić uwagę, że zjawiska hydrauliczne zachodzące w serwozaworach i siłownikach (przepływy oleju) modelowane są w pakiecie do symulacji procesów sterowania, natomiast zjawiska mechaniczne (ruch elementów siłownika) w programie do modelowania układów wielocłonowych.

## 2. KINEMATYKA MANIPULATORA

Schemat kinematyczny manipulatora pokazano na rysunku 2. Dla uproszczenia pokazano tylko jeden siłownik hydrauliczny.



Rys. 2. Uproszczony schemat kinematyczny manipulatora

Współrzędne wektorów wodzących  $\mathbf{d}_i$  ( $i = 1, \dots, 6$ ) są stałe w układzie  $\pi_0$  (związany z podstawą manipulatora), a współrzędne wektorów wodzących  $\mathbf{s}_i^{(1)}$  ( $i = 1, \dots, 6$ ) są stałe w układzie  $\pi_1$  (związany z platformą ruchomą).

## 2.1. Obliczanie trajektorii zadanej

Położenie lokalnego układu odniesienia  $\pi_1$  w układzie globalnym  $\pi_0$  jest opisane przez wektor  $\mathbf{r}$ , a orientacja układu  $\pi_1$  względem  $\pi_0$  jest dana przez trzy kąty Eulera (z-x'-z''):  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ . Współrzędne wektora  $\mathbf{r}$  oraz wartości kątów  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  są zadanymi funkcjami czasu.

Dla zadanych wartości kątów Eulera, macierz kosinusów kierunkowych opisująca orientację układu  $\pi_1$  względem  $\pi_0$ , dana jest następującym wzorem:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_z(\varphi_1) \mathbf{R}_x(\varphi_2) \mathbf{R}_z(\varphi_3) = \begin{bmatrix} \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 & 0 \\ \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_2 & -\sin \varphi_2 \\ 0 & \sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi_3 & -\sin \varphi_3 & 0 \\ \sin \varphi_3 & \cos \varphi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_3 \cos \varphi_1 - \sin \varphi_3 \cos \varphi_2 \sin \varphi_1 & -\sin \varphi_3 \cos \varphi_1 - \cos \varphi_3 \cos \varphi_2 \sin \varphi_1 & \sin \varphi_2 \sin \varphi_1 \\ \sin \varphi_3 \cos \varphi_2 \cos \varphi_1 + \cos \varphi_3 \sin \varphi_1 & \cos \varphi_3 \cos \varphi_2 \cos \varphi_1 - \sin \varphi_3 \sin \varphi_1 & -\sin \varphi_2 \cos \varphi_1 \\ \sin \varphi_3 \sin \varphi_2 & \cos \varphi_3 \sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Prędkość liniową początku układu  $\pi_1$  względem  $\pi_0$  oblicza się różniczkując wektor  $\mathbf{r}$  względem czasu:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}, \quad (2)$$

natomiast prędkość kątową układu  $\pi_1$  można obliczyć w następujący sposób:

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{E}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\varphi}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{E}(\boldsymbol{\varphi}) \dot{\boldsymbol{\varphi}}, \quad \boldsymbol{\varphi} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}(\boldsymbol{\varphi}) = \begin{bmatrix} 0 & \cos \varphi_1 & \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \\ 0 & \sin \varphi_1 & -\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \\ 1 & 0 & \cos \varphi_2 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Przyspieszenie liniowe początku układu  $\pi_1$  oblicza się różniczkując wektor prędkości:

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}}, \quad (4)$$

a przyspieszenie kątowe dane jest następującymi wzorami:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \dot{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\mathbf{E}}\dot{\boldsymbol{\varphi}} + \mathbf{E}\ddot{\boldsymbol{\varphi}}, \quad \dot{\mathbf{E}}(\boldsymbol{\varphi}, \dot{\boldsymbol{\varphi}}) = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 & \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \dot{\varphi}_2 \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \\ 0 & \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 & \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 - \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \\ 0 & 0 & -\dot{\varphi}_2 \sin \varphi_2 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

## 2.2. Zadanie odwrotne kinematyki

Zadanie odwrotne kinematyki polega na wyznaczeniu ruchu siłowników (długości oraz prędkości i przyspieszenia wysuwania), kiedy dany jest ruch platformy (położenie, prędkość i przyspieszenie).

Jeśli wektor  $\mathbf{r}$  oraz macierz  $\mathbf{R}$  są dane, to wektor  $\mathbf{l}_j$  o początku w punkcie  $A_j$  oraz końcu w punkcie  $B_j$  można obliczyć ze wzoru:

$$\mathbf{l}_j = \mathbf{r} + \mathbf{R}\mathbf{s}_j^{(1)} - \mathbf{d}_j. \quad (6)$$

Długość wektora  $\mathbf{l}_j$  można obliczyć ze wzoru:

$$l_j = \sqrt{\mathbf{l}_j^T \mathbf{l}_j}. \quad (7)$$

Wersor kierunkowy siłownika  $j$  zdefiniujemy jako:

$$\mathbf{u}_j = \mathbf{l}_j / l_j. \quad (8)$$

Długości wszystkich sześciu siłowników zestawmy w sześćoelementowy wektor  $\mathbf{L}$ :

$$\mathbf{L} = [l_1 \quad \dots \quad l_6]^T. \quad (9)$$

Różniczkując równanie (6) względem czasu i wykorzystując własności pochodnej macierzy rotacji, uzyskujemy:

$$\dot{\mathbf{l}}_j = \dot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{R}}\mathbf{s}_j^{(1)} = \mathbf{v} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{R}\mathbf{s}_j^{(1)} = \mathbf{v} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{s}_j. \quad (10)$$

W powyższym równaniu przez  $\mathbf{s}_j$  oznaczono współrzędne wektora wodzącego punktu  $B_j$  w układzie  $\pi_1$  zapisane w układzie  $\pi_0$  ( $\mathbf{s}_j = \mathbf{R}\mathbf{s}_j^{(1)}$ ).

Wersor  $\mathbf{u}_j$  ma jednostkową długość. Zatem pochodna wersora  $\mathbf{u}_j$  jest do niego prostopadła. Można to wyrazić za pomocą następujących równań:

$$\mathbf{u}_j^T \mathbf{u}_j = 1, \quad (11)$$

$$\mathbf{u}_j^T \dot{\mathbf{u}}_j = 0. \quad (12)$$

Wektor  $\mathbf{l}_j$  można zapisać w następujący sposób:

$$\mathbf{l}_j = l_j \mathbf{u}_j. \quad (13)$$

Różniczkując równanie (13) względem czasu, otrzymujemy:

$$\dot{\mathbf{l}}_j = \dot{l}_j \mathbf{u}_j + l_j \dot{\mathbf{u}}_j. \quad (14)$$

Mnożąc powyższe równanie lewostronnie przez  $\mathbf{u}_j^T$  oraz uwzględniając zależności (12) i (11), uzyskujemy:

$$\mathbf{u}_j^T \dot{\mathbf{l}}_j = \dot{l}_j \mathbf{u}_j^T \mathbf{u}_j + l_j \mathbf{u}_j^T \dot{\mathbf{u}}_j = \dot{l}_j. \quad (15)$$

Uwzględniając zależność (10) w równaniu (15), uzyskujemy:

$$\dot{l}_j = \mathbf{u}_j^T \dot{\mathbf{l}}_j = \mathbf{u}_j^T (\mathbf{v} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{s}_j) = \mathbf{u}_j^T \mathbf{v} - \mathbf{u}_j^T \tilde{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{s}_j = \mathbf{J}_j \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} \quad (16)$$

W powyższym równaniu przez  $\mathbf{J}_j$  oznaczono  $j$ -ty wiersz jacobianu manipulatora:

$$\mathbf{J}_j = [\mathbf{u}_j^T \quad -\mathbf{u}_j^T \tilde{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{s}_j]. \quad (17)$$

Równanie (16) pozwala na obliczenie poszukiwanych prędkości wydłużania się siłowników. Prędkości siłowników zestawmy w sześćoelementowy wektor  $\dot{\mathbf{L}}$ :

$$\dot{\mathbf{L}} = [\dot{l}_1 \quad \dots \quad \dot{l}_6]^T. \quad (18)$$

Różniczkując równanie (10) względem czasu uzyskujemy:

$$\ddot{\mathbf{l}}_j = \dot{\mathbf{v}} + \dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}\mathbf{R}\mathbf{s}_j^{(1)} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}\dot{\mathbf{R}}\mathbf{s}_j^{(1)} = \dot{\mathbf{v}} + \dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}\mathbf{R}\mathbf{s}_j^{(1)} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}\tilde{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{R}\mathbf{s}_j^{(1)} = \mathbf{a} + \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}\mathbf{s}_j + \tilde{\boldsymbol{\omega}}\tilde{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{s}_j. \quad (19)$$

Zrózniczkowanie równania (15) prowadzi do wzoru:

$$\ddot{l}_j = \dot{\mathbf{u}}_j^T \dot{\mathbf{l}}_j + \mathbf{u}_j^T \ddot{\mathbf{l}}_j. \quad (20)$$

Wektor  $\dot{\mathbf{u}}_j$  można wyznaczyć z zależności (14):

$$\dot{\mathbf{u}}_j = \frac{1}{l_j} (\dot{\mathbf{l}}_j - \dot{l}_j \mathbf{u}_j). \quad (21)$$

Podstawiając (19) do (20), otrzymujemy:

$$\ddot{l}_j = \dot{\mathbf{u}}_j^T \dot{\mathbf{l}}_j + \mathbf{u}_j^T (\mathbf{a} + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{s}_j + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{s}_j) = \mathbf{u}_j^T \mathbf{a} - \mathbf{u}_j^T \tilde{\mathbf{s}}_j \boldsymbol{\varepsilon} + \dot{\mathbf{u}}_j^T \dot{\mathbf{l}}_j + \mathbf{u}_j^T \tilde{\boldsymbol{\omega}} \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{s}_j = \mathbf{J}_j \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \boldsymbol{\varepsilon} \end{bmatrix} + \dot{\mathbf{u}}_j^T \dot{\mathbf{l}}_j + \mathbf{u}_j^T \tilde{\boldsymbol{\omega}} \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{s}_j. \quad (22)$$

Powyższe równanie pozwala na obliczenie poszukiwanych przyspieszeń. Przyspieszenia siłowników zestawień w sześćelementowy wektor  $\ddot{\mathbf{L}}$ :

$$\ddot{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} \ddot{l}_1 & \dots & \ddot{l}_6 \end{bmatrix}^T. \quad (23)$$

### 2.3. Zadanie proste kinematyki

Zadanie proste kinematyki polega na wyznaczeniu ruchu platformy (położenie, prędkość i przyspieszenie), kiedy dany jest ruch siłowników (długości oraz prędkości i przyspieszenia wysuwania).

Zadanie o położeniach będzie rozwiązywane metodami numerycznymi, dlatego dla uzyskania prostszego zapisu, wygodnie jest nadać jednolite nazwy poszukiwanym wielkościom, opisującym położenie i orientację platformy ruchomej (współrzędne wektora  $\mathbf{r}$  i kąty Eulera odpowiadające macierzy  $\mathbf{R}$ ). Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$\mathbf{q} \equiv [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5 \ q_6]^T \equiv [r_x \ r_y \ r_z \ \varphi_1 \ \varphi_2 \ \varphi_3]^T \equiv [\mathbf{r}^T \ \boldsymbol{\varphi}^T]^T. \quad (24)$$

Podnosząc do kwadratu równanie (7) i uwzględniając wzór (6) otrzymujemy:

$$l_j^2 = \mathbf{l}_j^T \mathbf{l}_j = (\mathbf{r} + \mathbf{R} \mathbf{s}_j^{(1)} - \mathbf{d}_j)^T (\mathbf{r} + \mathbf{R} \mathbf{s}_j^{(1)} - \mathbf{d}_j). \quad (25)$$

Powyższe równanie można napisać dla każdego siłownika ( $j = 1, \dots, 6$ ). Dysponujemy zatem układem sześciu równań, z których należy wyznaczyć poszukiwane wielkości  $\mathbf{r}$  oraz  $\mathbf{R}$ . Równania typu (25) można zapisać łącznie w postaci:

$$\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{q}) \equiv [\Phi_1(\mathbf{q}) \ \dots \ \Phi_6(\mathbf{q})]^T = \mathbf{0}_{6 \times 1}, \quad (26)$$

gdzie  $\Phi_j$  jest zdefiniowane następująco:

$$\Phi_j(\mathbf{q}) \equiv \Phi_j(\mathbf{r}, \boldsymbol{\varphi}) \equiv (\mathbf{r} + \mathbf{R}(\boldsymbol{\varphi}) \mathbf{s}_j^{(1)} - \mathbf{d}_j)^T (\mathbf{r} + \mathbf{R}(\boldsymbol{\varphi}) \mathbf{s}_j^{(1)} - \mathbf{d}_j) - l_j^2 = 0. \quad (27)$$

Układ równań nieliniowych rozwiązywany będzie numerycznie, metodą Newtona–Raphsona. Spośród możliwych rozwiązań zadania kinematyki interesuje nas tylko jedno, odpowiadające konfiguracji w jakiej zmontowano mechanizm. Dlatego szczególną uwagę poświęcono właściwemu doborowi przybliżenia startowego  $\mathbf{q}^0$ . Stwierdzono, że dobre rezultaty uzyskuje się rozpoczynając proces iteracyjny od wektora  $\mathbf{q}^0$  reprezentującego centralny punkt przestrzeni roboczej. Wykonano też testy numeryczne, potwierdzające, że iteracje zbiegają do pożądanego rozwiązania. W metodzie Newtona–Raphsona schemat iteracyjny jest następujący:

$$\mathbf{q}^{k+1} = \mathbf{q}^k - [\boldsymbol{\Phi}_q(\mathbf{q}^k)]^{-1} \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{q}^k). \quad (28)$$

Stosowanie metody Newtona–Raphsona wymaga zróżniczkowania odwzorowania (26) względem poszukiwanych wielkości  $\mathbf{q}$ . Rozpocznijmy od obliczenia pochodnych cząstkowych macierzy kosinusów kierunkowych (1):

$$\begin{aligned} (\mathbf{R}(\boldsymbol{\varphi}))_{\varphi_1} &= \boldsymbol{\Omega}_z \mathbf{R}_z(\varphi_1) \mathbf{R}_x(\varphi_2) \mathbf{R}_z(\varphi_3), \\ (\mathbf{R}(\boldsymbol{\varphi}))_{\varphi_2} &= \mathbf{R}_z(\varphi_1) \boldsymbol{\Omega}_x \mathbf{R}_x(\varphi_2) \mathbf{R}_z(\varphi_3), \\ (\mathbf{R}(\boldsymbol{\varphi}))_{\varphi_3} &= \mathbf{R}_z(\varphi_1) \mathbf{R}_x(\varphi_2) \boldsymbol{\Omega}_z \mathbf{R}_z(\varphi_3), \end{aligned} \quad (29)$$

gdzie stałe macierze  $\boldsymbol{\Omega}_x$  i  $\boldsymbol{\Omega}_z$  zdefiniowane są następująco:

$$\mathbf{\Omega}_x \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Omega}_z \equiv \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (30)$$

Powyższych wzorów można użyć podczas obliczania pochodnych zależności (27). Wykonując rachunki i wykorzystując wzór na pochodną iloczynu skalarnego wektorów, otrzymujemy (dla  $j = 1, \dots, 6$ ):

$$\left(\Phi_j(\mathbf{r}, \boldsymbol{\varphi})\right)_r \equiv 2(\mathbf{r} + \mathbf{R}(\boldsymbol{\varphi})\mathbf{s}_j^{(1)} - \mathbf{d}_j)^T \equiv 2\mathbf{l}_j^T, \quad (31)$$

$$\left(\Phi_j(\mathbf{r}, \boldsymbol{\varphi})\right)_{\varphi_k} \equiv 2(\mathbf{r} + \mathbf{R}(\boldsymbol{\varphi})\mathbf{s}_j^{(1)} - \mathbf{d}_j)^T (\mathbf{R}(\boldsymbol{\varphi}))_{\varphi_k} \mathbf{s}_j^{(1)} \equiv 2\mathbf{l}_j^T (\mathbf{R}(\boldsymbol{\varphi}))_{\varphi_k} \mathbf{s}_j^{(1)}, \quad k = 1, 2, 3. \quad (32)$$

Dysponujemy już wszystkimi niezbędnymi formułami. Dla porządku przypomnijmy, że rozwiązywane przez nas równania kinematyki dane są wzorami (27). Elementy macierzy  $\Phi_q$  obliczamy, korzystając z zależności (31) i (32), a schemat iteracyjny dany jest przez (28).

Po wykonaniu obliczeń dotyczących zadania o położeniu, wielkości  $\mathbf{r}$  oraz  $\mathbf{R}$  są znane. Wykonując obliczenia według wzorów (6), (7), (8) oraz (17) (dla  $j = 1, \dots, 6$ ) można obliczyć jacobian manipulatora  $\mathbf{J}$ . Równania (16) dla  $i = 1, \dots, 6$  można zestawić w jedno:

$$\dot{\mathbf{l}} = \begin{bmatrix} \dot{l}_1 \\ \vdots \\ \dot{l}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{J}_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix}. \quad (33)$$

W zadaniu prostym prędkości siłowników  $\dot{l}_j$  są dane, zatem poszukiwane prędkości platformy  $\mathbf{v}$  oraz  $\boldsymbol{\omega}$  oblicza się rozwiązując układ równań liniowych (33).

Po wykonaniu obliczeń dotyczących zadań o położeniu i prędkości, wielkości  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{v}$  oraz  $\boldsymbol{\omega}$  są znane. Wykonując obliczenia według wzorów (10) oraz (21) (dla  $j = 1, \dots, 6$ ) można obliczyć  $\dot{\mathbf{l}}_j$  oraz  $\dot{\mathbf{u}}_j$ . Równania (22) dla  $j = 1, \dots, 6$  można zestawić w jedno:

$$\mathbf{J} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \boldsymbol{\varepsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{l}_1 - \dot{\mathbf{u}}_1^T \dot{\mathbf{l}}_1 - \mathbf{u}_1^T \tilde{\boldsymbol{\omega}} \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{s}_1 \\ \vdots \\ \ddot{l}_6 - \dot{\mathbf{u}}_6^T \dot{\mathbf{l}}_6 - \mathbf{u}_6^T \tilde{\boldsymbol{\omega}} \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{s}_6 \end{bmatrix}. \quad (34)$$

W zadaniu prostym przyspieszenia siłowników  $\ddot{l}_j$  są dane, zatem poszukiwane przyspieszenia platformy  $\mathbf{a}$  oraz  $\boldsymbol{\varepsilon}$  oblicza się, rozwiązując układ równań liniowych (34).

### 3. DYNAMIKA MANIPULATORA

#### 3.1. Zadanie proste dynamiki

Zadanie proste dynamiki polega na wyznaczeniu ruchu mechanizmu, kiedy dane są siły działające na ten mechanizm. Zadanie to będzie rozwiązywane przez program do analizy układów wielocłonowych, który automatycznie układa równania opisujące modelowany mechanizm, zatem nie musimy wyprowadzać równań ruchu manipulatora w postaci pełnej (pozbawionej istotnych uproszczeń).

### 3.2. Zadanie odwrotne dynamiki (uproszczone)

Zadanie odwrotne dynamiki polega na obliczaniu wartości sił napędowych, jakie należy przyłożyć do mechanizmu, aby uzyskać żądany ruch. Układ sterowania robotem będzie korzystał z rozwiązania zadania odwrotnego dynamiki. Do obliczeń zostanie wykorzystany uproszczony model dynamiki manipulatora. Wszystkie, za wyjątkiem platformy ruchomej, człony manipulatora będą traktowane jak nieważkie. Tarcie w parach kinematycznych będzie pominięte (za wyjątkiem tarcia w siłownikach, które zostanie omówione osobno w punkcie 3.3).

Zakładamy, że środek masy platformy ruchomej pokrywa się z początkiem układu odniesienia  $\pi_1$ . Przyjmujemy, że platforma charakteryzowana jest przez masę  $m$  i macierz momentów bezwładności  $\mathbf{I}^{(1)}$ . Elementy macierzy  $\mathbf{I}^{(1)}$  wyznaczone względem lokalnego, poruszającego się wraz z platformą, układu  $\pi_1$  są stałe. Momenty bezwładności wyznaczone względem środka masy platformy i kierunków osi układu  $\pi_0$  związanego z podstawą zmieniają się wraz z ruchem platformy. Macierz bezwładności wyznaczoną względem kierunków osi układu  $\pi_0$  można obliczyć ze wzoru:

$$\mathbf{I} = \mathbf{R} \mathbf{I}^{(1)} \mathbf{R}^T . \quad (35)$$

Równanie Newtona wiąże wypadkową siłę oddziaływania siłowników na platformę ruchomą z jej masą i przyspieszeniem:

$$\mathbf{F} = m \mathbf{a} . \quad (36)$$

Zależność pomiędzy przyspieszeniem i prędkością kątową platformy ruchomej oraz jej macierzą bezwładności a wypadkowym momentem oddziaływania siłowników, liczonym względem środka masy dana jest równaniem Eulera:

$$\mathbf{M} = \mathbf{I} \boldsymbol{\varepsilon} + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} . \quad (37)$$

Dla zadanego ruchu platformy, siłę  $\mathbf{F}$  oraz moment  $\mathbf{M}$  można wyznaczyć wprost z równań (36) oraz (37).

Wypadkowa siła  $\mathbf{F}$  oraz moment  $\mathbf{M}$  oddziaływania siłowników na platformę ruchomą są związane z siłami  $P_j$  rozwijanymi przez poszczególne siłowniki poprzez jacobian manipulatora  $\mathbf{J}$  [1, 8]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} = -\mathbf{J}^T \mathbf{P} , \quad \mathbf{P} = [P_1 \quad \dots \quad P_6]^T . \quad (38)$$

Rozwiązanie zadania odwrotnego dynamiki polega zatem na wykonaniu obliczeń według wzorów (35)÷(37) i rozwiązaniu układu równań liniowych (38). Sposób obliczania jacobianu manipulatora omówiono w punkcie 2.3.

### 3.3. Tarcie w siłownikach hydraulicznych

Siła  $P_j$ , z jaką siłownik działa na platformę, różni się od siły parcia  $P_j^H$ , wywieranej przez olej na denko tłoka. Różnica spowodowana jest przez występowanie tarcia pomiędzy elementami siłownika. Podczas symulacji przyjęto następujący model siły tarcia  $P_j^F$  występującej w  $j$ -tym siłowniku [4]:

$$P_j^F = \begin{cases} F_C \operatorname{sgn}(\dot{i}_j) + b \dot{i}_j & \dot{i}_j \neq 0 \\ P_j^{ext} & \dot{i}_j = 0, |P_j^{ext}| < F_S \\ F_S \operatorname{sgn}(P_j^{ext}) & \dot{i}_j = 0, |P_j^{ext}| \geq F_S \end{cases} , \quad (39)$$

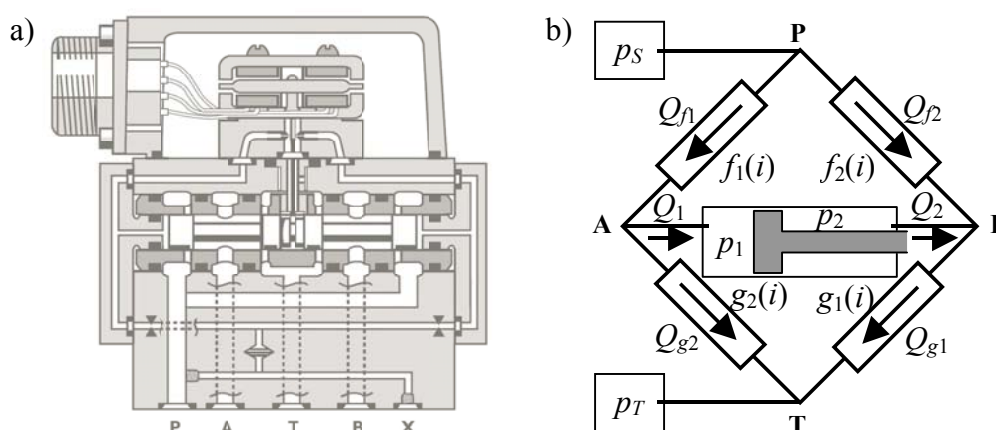
gdzie:  $b$  jest współczynnikiem tarcia wiskotycznego,  $F_C$  siłą tarcia Coulomba,  $F_S$  maksymalną siłą tarcia statycznego, a  $F^{ext}$  siłą zewnętrzną działającą na siłownik.

## 4. SIŁOWNIK HYDRAULICZNY

### 4.1. Najważniejsze zależności

W niniejszej pracy wykorzystano równania opisujące siłownik oraz zawór elektrohydrauliczny zaczerpnięte z prac [4] i [5], wprowadzając jednak pewne modyfikacje. Do sterowania siłownikiem służy serwowzawór elektrohydrauliczny pokazany na rysunku 3a. Częstości własne serwonapędu znacznie przewyższają częstości własne jego obciążenia mechanicznego, dlatego w modelu pominięto dynamikę elementów zaworu, uwzględniając jedynie opory przepływu. Założono również, że geometria zaworu jest idealna, a w siłowniku nie występują przecieki [2, 7].

Typowy serwowzawór hydrauliczny umożliwia przepływ oleju czterema drogami. Opory przepływu zmienia się przykładając napięcie sterujące. Siłownik hydrauliczny wraz z serwowzaworem może być przedstawiony jako hydrauliczny odpowiednik mostka Wheastone'a, pokazany na rysunku 3b.



Rys. 3. Serwowzawór w przekroju (a) oraz schemat serwowzaworu i siłownika (b)

Kiedy prąd sterujący zaworem jest dodatni ( $i > 0$ ), olej przepływa drogą P – A – B – T, a przepływ przez otwory P – B i A – T ma charakter przecieków. Podobnie, kiedy prąd sterujący jest ujemny ( $i < 0$ ), przepływ następuje drogą P – B – A – T, a przecieki przedostają się przez otwory P – A i B – T. Natężenia przepływu cieczy roboczej poprzez każdą z dróg w rozdzielaczu hydraulicznym zależą od ciśnień panujących w układzie oraz od współczynników przepływu  $f_1, f_2, g_1$  i  $g_2$ . Zależności te można zapisać w formie równań:

$$\begin{aligned} Q_{f1} &= f_1(i, C_d, \rho) \sqrt{p_S - p_1}, & Q_{g1} &= g_1(i, C_d, \rho) \sqrt{p_2 - p_T}, \\ Q_{f2} &= f_2(i, C_d, \rho) \sqrt{p_S - p_2}, & Q_{g2} &= g_2(i, C_d, \rho) \sqrt{p_1 - p_T}, \end{aligned} \quad (40)$$

gdzie  $Q_{f1}$ ,  $Q_{f2}$ ,  $Q_{g1}$  i  $Q_{g2}$  oznaczają odpowiednio przepływy przez otwory P – A, P – B, A – T i B – T,  $p_S$  oznacza ciśnienie zasilania,  $p_T$  – ciśnienie powrotne,  $p_1$  – ciśnienie w siłowniku hydraulicznym po stronie tłoka,  $p_2$  – ciśnienie w siłowniku po stronie tłocyska,  $i$  jest natężeniem prądu w silniku serwowzaworu (sygnałem sterującym), a  $f_1(i, C_d, \rho)$ ,  $f_2(i, C_d, \rho)$ ,  $g_1(i, C_d, \rho)$  oraz  $g_2(i, C_d, \rho)$  są nieliniowymi funkcjami prądu sterującego, współczynnika  $C_d$  oraz gęstości oleju  $\rho$ .



W ogólnym przypadku współczynnik  $C_d$  zależy od liczby charakteryzującej przepływ Reynoldsa i geometrii zaworu. Zależność funkcji  $f_1, f_2, g_1$  i  $g_2$  od liczby Reynoldsa i gęstości oleju nie jest silna, zatem funkcje  $f_1(i, C_d, \rho), f_2(i, C_d, \rho), g_1(i, C_d, \rho)$  oraz  $g_2(i, C_d, \rho)$  można zredukować do  $f_1(i), f_2(i), g_1(i)$  oraz  $g_2(i)$ , uwzględniając jedynie zależność od prądu sterującego [5]. Uwzględniając symetrię serwozaworu, można sformułować następujące zależności:

$$\begin{aligned} f_1(i) &= g_1(i) = f_2(-i) = g_2(-i), \\ f_2(i) &= g_2(i) = f_1(-i) = g_1(-i). \end{aligned} \quad (41)$$

Badania doświadczalne [3] wykazały, że rozsądnym przybliżeniem jest przyjęcie, iż powyższe funkcje zależą liniowo od prądu sterującego, kiedy droga przepływu jest otwarta oraz, że mają one stałą wartość, kiedy przepływ ma charakter przecieku. Na przykład, kiedy  $i > 0$ , główny przepływ następuje przez otwory P – A i B – T, a funkcje występujące w równaniu (40) można zapisać w następujący sposób:

$$\begin{aligned} f_1(i) &= g_1(i) = K_0 + K_1 \cdot i, \\ f_2(i) &= g_2(i) = K_0, \end{aligned} \quad (42)$$

gdzie stały współczynnik  $K_1$  odpowiada za przepływ przez otwarty otwór, a stały współczynnik  $K_0$  za przecieki, kiedy droga przepływu jest zamknięta. Ze względu na symetrię wykonania zaworu współczynniki  $K_1$  i  $K_0$  są jednakowe dla wszystkich dróg.

Natężenie przepływu cieczy roboczej wpływającej do cylindra po stronie tłoka ( $Q_1$ ) oraz wypływającej z cylindra po stronie tłoczyska ( $Q_2$ ) można obliczyć w następujący sposób:

$$\begin{aligned} Q_1 &= Q_{f1} - Q_{g2}, \\ Q_2 &= Q_{g1} - Q_{f2}. \end{aligned} \quad (43)$$

Natężenia przepływu  $Q_1$  i  $Q_2$  zależą także od  $\dot{l}$  – prędkości ruchu tłoka względem cylindra:

$$Q_1 = A_1 \dot{l}, \quad Q_2 = A_2 \dot{l}. \quad (44)$$

gdzie  $A_1$  oznacza powierzchnię czynną tłoka, a  $A_2$  – powierzchnię tłoka pomniejszoną o powierzchnię tłoczyska.

Wypadkowa siła oddziaływania na tłok zależy od ciśnień panujących po obu stronach tłoka i wyraża się wzorem:

$$P^H = p_1 A_1 - p_2 A_2. \quad (45)$$

## 4.2. Obliczanie rozwijanej siły

W trakcie symulacji pracy manipulatora konieczne będzie obliczanie sił rozwijanych przez siłowniki. Siła generowana przez siłownik zależy od dwóch czynników: prędkości ruchu tłoka względem cylindra oraz natężenia prądu sterującego elektrozaworem.

Podstawiając (44) oraz (40) do (43), otrzymujemy:

$$f_1 \sqrt{p_s - p_1} - g_2 \sqrt{p_1 - p_T} - A_1 \dot{l} = 0, \quad (46)$$

$$g_1 \sqrt{p_2 - p_T} - f_2 \sqrt{p_s - p_2} - A_2 \dot{l} = 0. \quad (47)$$

Pierwsze z powyższych równań pozwala na obliczenie ciśnienia  $p_1$ , a drugie – ciśnienia  $p_2$ . Równanie (46) jest w istocie równaniem kwadratowym względem  $p_1$ . Jego rozwiązanie jest następujące (interesuje nas tylko rozwiązanie z przedziału  $[p_T, p_s]$ ):

$$p_1 = \frac{(p_T + p_S)f_1^2 g_2^2 + p_T g_2^4 + p_S f_1^4 - (f_1^2 - g_2^2)A_1^2 l^2 \mp 2f_1 g_2 A_1 l \sqrt{(p_S - p_T)(f_1^2 + g_2^2) - A_1^2 l^2}}{(f_1^2 + g_2^2)^2}. \quad (48)$$

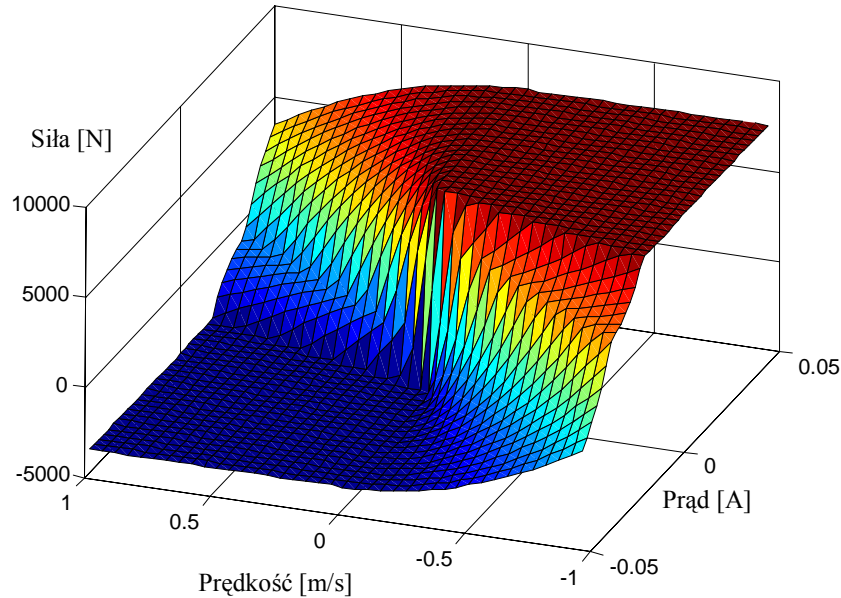
Solving equation (47) for  $p_2$  yields:

$$p_2 = \frac{(p_T + p_S)f_2^2 g_1^2 + p_T g_1^4 + p_S f_2^4 - (f_2^2 - g_1^2)A_2^2 l^2 \pm 2f_2 g_1 A_2 l \sqrt{(p_S - p_T)(f_2^2 + g_1^2) - A_2^2 l^2}}{(f_2^2 + g_1^2)^2}. \quad (49)$$

Należy zauważyć, że równania (46) i (47) zostały dwukrotnie podniesione do potęgi drugiej, by uzyskać równania kwadratowe względem  $p_1$  i  $p_2$ . Może się zatem zdarzyć, że znalezione wartości ciśnień spełniają wprawdzie odpowiednie równania kwadratowe, ale nie spełniają równań (46) i (47). Zatem podczas obliczeń należy zawsze sprawdzać, czy rozwiązania uzyskane z równań (48) i (49) są właściwe.

Po wyznaczeniu ciśnień  $p_1$  i  $p_2$  poszukiwaną siłę wyznacza się wprost z równania (45).

Korzystając z powyższych równań można wyznaczyć zależność siły rozwijanej przez serwonapęd hydrauliczny od jego chwilowej prędkości oraz od natężenia prądu sterującego. Zależność tę przedstawiono w formie wykresu pokazanego na rysunku 4. W obliczeniach wartości ciśnień  $p_1$  i  $p_2$  były ograniczane do przedziału  $[p_T, p_S]$ .



Rys. 4. Siła rozwijana przez siłownik w funkcji prędkości i prądu sterującego

### 4.3. Obliczanie prądu sterującego

Układ sterowania manipulatorem rozwiązuje odwrotne zadanie dynamiki i wyznacza siły niezbędne do wykonania zadanego ruchu. Następnie, dla znanej prędkości ruchu siłownika i zadanej siły, należy obliczyć odpowiednią wartość natężenia prądu sterującego.

Analityczną formę zależności pomiędzy zadaną siłą  $P^H$  a poszukiwanym prądem  $i$  można uzyskać podstawiając (48) i (49) do (45), a następnie wykorzystując zależności (42). Uzyskana zależność byłaby jednak zbyt skomplikowana, by analitycznie wyznaczyć z niej poszukiwane natężenie prądu. Dlatego zdecydowano się na zastosowanie metody numerycznej.

Obliczając poszukiwane natężenie prądu sterującego  $i$  posłużono się metodą bisekcji. Wykorzystano procedurę pozwalającą na obliczenie siły  $P^H$ , gdy dane są natężenie  $i$  oraz

prędkość  $\dot{l}$  (patrz punkt poprzedni). Prędkość  $\dot{l}$  jest dana, zatem zależność  $P^H(i, \dot{l})$  może być traktowana jako funkcja jednej zmiennej – prądu  $i$ . Poszukiwane natężenie prądu sterującego musi należeć do przedziału  $[-i_{\max}, i_{\max}]$ . Jak wynika z rysunku 4, dla ustalonej prędkości  $\dot{l}$  zależność siły  $P^H$  od natężenia  $i$  jest monotoniczna. Dzięki temu zastosowanie metody bisekcji jest możliwe.

Procedura bisekcji działa poprawnie, jeśli dla zadanej siły  $P_D^H$  oraz chwilowej prędkości  $\dot{l}$  spełniony jest warunek:

$$P^H(i_{\min}, \dot{l}) < P_D^H < P^H(i_{\max}, \dot{l}). \quad (50)$$

W przeciwnym wypadku zadana siła jest nieosiągalna. W wyniku obliczeń uzyskujemy natężenie prądu sterującego  $i_{\max}$  (lub  $-i_{\max}$ ), odpowiadające maksymalnej (lub minimalnej) sile, jaką może rozwinąć siłownik.

## 5. UKŁAD STEROWANIA

W obliczeniach wykorzystano opisany w pracy [4] układ sterowania napędzaną hydraulicznie platformą Stewarta. Układ sterowania wykorzystuje model dynamiki manipulatora oraz modele siłowników hydraulicznych wraz z serwozaworami. Własności dynamiczne urządzenia są znane, zatem w zastosowanym podejściu sprzężenie zwrotne na poziomie sił, ciśnień i przyspieszeń nie jest konieczne, mierzone są jedynie chwilowe długości i prędkości siłowników.

Prawo sterowania skonstruowane jest w taki sposób, by uchyb sterowania dążył asymptotycznie do zera, niezależnie od zmian obciążenia platformy. Uchyby na poziomie położeń i prędkości redukowane są jednocześnie. Wartości sygnałów sterujących (prądów sterujących serwozaworami) dobiera się w taki sposób, by spełnione było następujące równanie:

$$\ddot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_v \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_p \mathbf{e} = \mathbf{0}, \quad (51)$$

gdzie  $\mathbf{e} = \mathbf{L}_D - \mathbf{L}$  jest uchybem sterowania ( $\mathbf{L}_D$  jest 6-elementowym wektorem zadanych długości siłowników), a  $\mathbf{K}_p = k_p \mathbf{I}_{6 \times 6}$  oraz  $\mathbf{K}_v = k_v \mathbf{I}_{6 \times 6}$  diagonalnymi macierzami wzmocnienia w torze położenia i prędkości. Współczynniki wzmocnienia  $k_p$  i  $k_v$  są tak dobrane, by rozwiązanie równania (51) miało charakter aperiodyczny krytyczny.

W pierwszej fazie obliczeń układ sterowania na podstawie zadanej trajektorii platformy ruchomej wyznacza, rozwiązując zadanie odwrotne kinematyki, zadane długości  $\mathbf{L}_D$ , prędkości  $\dot{\mathbf{L}}_D$  i przyspieszenia siłowników  $\ddot{\mathbf{L}}_D$ .

W rzeczywistym manipulatorze rzeczywiste długości  $\mathbf{L}$  oraz prędkości  $\dot{\mathbf{L}}$  siłowników są mierzone przez odpowiednie czujniki. W modelu symulacyjnym wartości te są obliczane przez pakiet analizy układów wieloczołonowych, dzięki czemu można zamknąć pętlę sprzężenia zwrotnego w układzie sterowania.

Kolejnym krokiem obliczeń jest wyznaczenie przyspieszeń. Dla danych wielkości  $\mathbf{L}_D$ ,  $\dot{\mathbf{L}}_D$ ,  $\ddot{\mathbf{L}}_D$ ,  $\mathbf{L}$  i  $\dot{\mathbf{L}}$  oblicza się wartość  $\ddot{\mathbf{L}}$ , spełniającą równanie (51):

$$\ddot{\mathbf{L}} = \ddot{\mathbf{L}}_D + \mathbf{K}_v \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_p \mathbf{e} = \ddot{\mathbf{L}}_D + \mathbf{K}_v (\dot{\mathbf{L}}_D - \dot{\mathbf{L}}) + \mathbf{K}_p (\mathbf{L}_D - \mathbf{L}). \quad (52)$$

Następnym etapem obliczeń jest rozwiązanie zadania odwrotnego dynamiki manipulatora, w którym dla danych  $\mathbf{L}$ ,  $\dot{\mathbf{L}}$  i  $\ddot{\mathbf{L}}$  oblicza się siły napędowe niezbędne do realizacji zadanego ruchu. Rozwiązanie zadania odwrotnego dynamiki musi być poprzedzone rozwiązaniem zadania prostego kinematyki, w którym ruch siłowników przeliczany jest na

ruch platformy. Obliczenia kończą się wyznaczeniem prądów sterujących serwozwaorami, przy których osiągnięte zostaną wyznaczone wcześniej siły napędowe.

## 6. WYNIKI OBLICZEŃ SYMULACYJNYCH

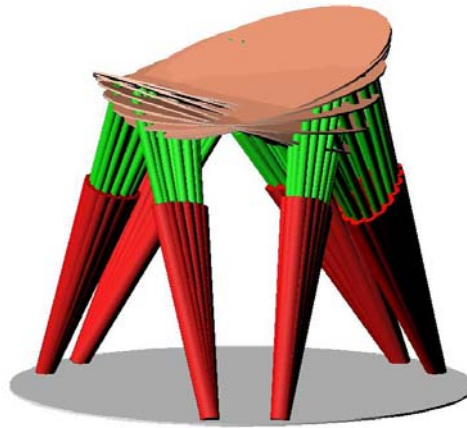
Schemat modelu symulacyjnego przedstawiono na rysunku 1. Przeprowadzono cykl symulacji, których celem było sprawdzenie, jaki wpływ na jakość sterowania robotem mają uproszczenia modelu dynamiki wykorzystywanego przez układ sterowania.

Wszystkie obliczenia przeprowadzono dla tej samej trajektorii zadanej. Trajektorja platformy ruchomej była opisana następującymi równaniami:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} x \sin(2\pi f \cdot t) \\ y \cos(2\pi f \cdot t) \\ z_1 + z \sin(2\pi f \cdot t) \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} \varphi_1(t) &= \alpha \cos(2\pi f \cdot t), \\ \varphi_2(t) &= \pi/2 + \beta \sin(2\pi f \cdot t), \\ \varphi_3(t) &= \gamma \sin(2\pi f \cdot t), \end{aligned} \quad (53)$$

gdzie parametry  $x, y, z, z_1, \alpha, \beta, \gamma, f$  mają stałe wartości, a czas  $t$  należy do przedziału  $[0, \tau]$ .

Manipulator w kolejnych fazach ruchu pokazano na rysunku 5.



Rys. 5. Manipulator w kolejnych fazach ruchu

Jakość sterownia oceniano na podstawie przebiegu uchybu położenia  $\mathbf{e} = \mathbf{L}_D - \mathbf{L}$  (różnica między zadanymi a zrealizowanymi długościami siłowników) oraz prędkości  $\dot{\mathbf{e}} = \dot{\mathbf{L}}_D - \dot{\mathbf{L}}$ . Uchyby sterownia  $\mathbf{e}$  i  $\dot{\mathbf{e}}$  są zmiennymi w czasie sześćcioelementowymi wektorami. Dla ułatwienia porównań wprowadzono skalarne miary uchybów, zwane dalej uchybami średnimi:

$$e_p = \sqrt{\frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \mathbf{e}(t)^T \mathbf{e}(t) dt}, \quad e_v = \sqrt{\frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \dot{\mathbf{e}}(t)^T \dot{\mathbf{e}}(t) dt}. \quad (54)$$

Przeprowadzono symulacje w kilku wariantach. Opis symulacji oraz ich syntetyczne wyniki w postaci uchybów średnich  $e_L$  i  $e_V$  zamieszczono w tabeli 1.

Tabela 1. Opis przeprowadzonych symulacji i ich syntetyczne wyniki

	<i>Model dynamiki odwrotnej (plakiet do ukl. sterowania)</i>	<i>Model symulacyjny manipulatora (pakiet do ukl. wieloczłonowych)</i>	$e_p$ [mm]	$e_v$ [mm/s]
A.	Tarcie pominięte	Tarcie pominięte Pominięte masy siłowników	0.18	0.68
B.	Tarcie pominięte	Tarcie pominięte Uwzględnione masy siłowników	3.50	4.03
C.	Tarcie pominięte	Tarcie uwzględnione Pominięte masy siłowników	7.77	33.11
D.	Tarcie pominięte	Tarcie uwzględnione Uwzględnione masy siłowników	8.52	31.92
E.	Tarcie pominięte	Tarcie uwzględnione Uwzględnione masy siłowników	3.50	4.19
F.	Tarcie uwzględnione Skorygowana masa platformy	Tarcie uwzględnione Uwzględnione masy siłowników	0.65	2.15
G.	Tarcie pominięte Skorygowana masa platformy	Tarcie uwzględnione Uwzględnione masy siłowników	7.70	31.73
H.	Tarcie niedoszacowane Skorygowana masa platformy	Tarcie uwzględnione Actuator masses included	4.04	19.14
I.	Tarcie przeszacowane Skorygowana masa platformy	Tarcie uwzględnione Uwzględnione masy siłowników	3.89	14.68
J.	Tarcie uwzględnione Skorygowana masa platformy	Tarcie uwzględnione Uwzględnione masy siłowników Wymiary zmienione o 1%	1.33	6.20
K.	Tarcie uwzględnione Skorygowana masa platformy	Tarcie uwzględnione Uwzględnione masy siłowników Obciążenie dołączone do platformy	10.80	14.56
L.	Tarcie uwzględnione Skorygowana masa platformy	Tarcie uwzględnione Uwzględnione masy siłowników Ruchome obciążenie platformy	6.30	11.02
M.	Tarcie uwzględnione Skorygowana masa platformy $k_p$ oraz $k_v$ zwiększone	Tarcie uwzględnione Uwzględnione masy siłowników Ruchome obciążenie platformy	1.62	2.94

Prawidłowa interpretacja informacji zawartych w tabeli 1 wymaga zwrócenia uwagi na kilka kwestii:

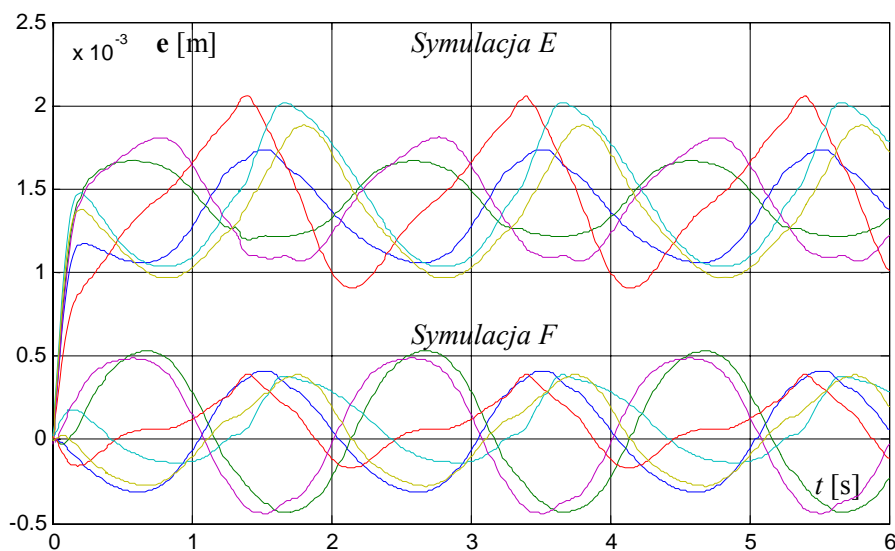
- Wszystkie symulacje przeprowadzono dla takich samych nastaw  $k_p = 64\pi^2$  i  $k_v = 16\pi$  wykorzystywanych przez prawo sterowania. Wyjątek stanowi symulacja M, w której wzmocnienia zwiększono do wartości  $k_p = 256\pi^2$  i  $k_v = 32\pi$ .
- W modelu dynamiki odwrotnej wykorzystywanym przez układ sterowania pominięto masy siłowników. Jedynym obiektem, którego masę uwzględniono jest platforma ruchoma. Natomiast w zadaniu prostym dynamiki, rozwiązywanym przez pakiet do analizy układów wieloczłonowych, w większości przeprowadzonych symulacji siłowniki mają niezerowe masy. Jedynie podczas symulacji A i C wyzerowano masy siłowników.
- W modelu dynamiki odwrotnej wykorzystywanym przez układ sterowania można w sposób uproszczony uwzględnić masy siłowników, korygując odpowiednio masę platformy (np. powiększając ją o masę tłoków). Postąpiono tak w symulacjach F÷M.
- Tarcie można uwzględniać bądź pomijać zarówno w modelu symulacyjnym utworzonym w programie do analizy układów wieloczłonowych, jak i w modelu dynamiki odwrotnej wykorzystywanym przez układ sterowania. Parametry opisujące tarcie należą do trudno mierzalnych oraz mało stabilnych, dlatego wykonano symulacje, w których

w obliczeniach wykonywanych przez układ sterowania uwzględniano tarcie, lecz jego parametry różniły się od parametrów używanych przez model symulacyjny manipulatora. Symulację H przeprowadzono dla niedoszacowanych (zmniejszonych o 50%) parametrów opisujących tarcie, natomiast symulację I dla parametrów przeszacowanych (zwiększonych o 50%).

- Rzeczywiste wymiary charakterystyczne manipulatora mogą różnić się od wymiarów nominalnych, wykorzystywanych podczas obliczeń prowadzonych przez układ sterowania. Symulację J przeprowadzono po to, by zbadać skutki niedokładnego oszacowania parametrów geometrycznych. Wymiary platformy różniły się o 1% od wymiarów uwzględnianych w układzie sterowania.
- W trzech symulacjach platformę manipulatora obciążono przenoszonym ładunkiem. W pierwszym wypadku (symulacja K) była to masa 50 kg sztywno połączona z platformą. W drugim i trzecim wypadku (symulacje L i M) – masa 30 kg była połączona z platformą za pomocą przegubu sferycznego oraz podtrzymujących ją sprężyn i tłumików.

Informacje zawarte w tabeli 2 zawierają jedynie orientacyjne dane o wynikach symulacji. Niektóre z bardziej interesujących wyników wykonanych symulacji omówiono poniżej.

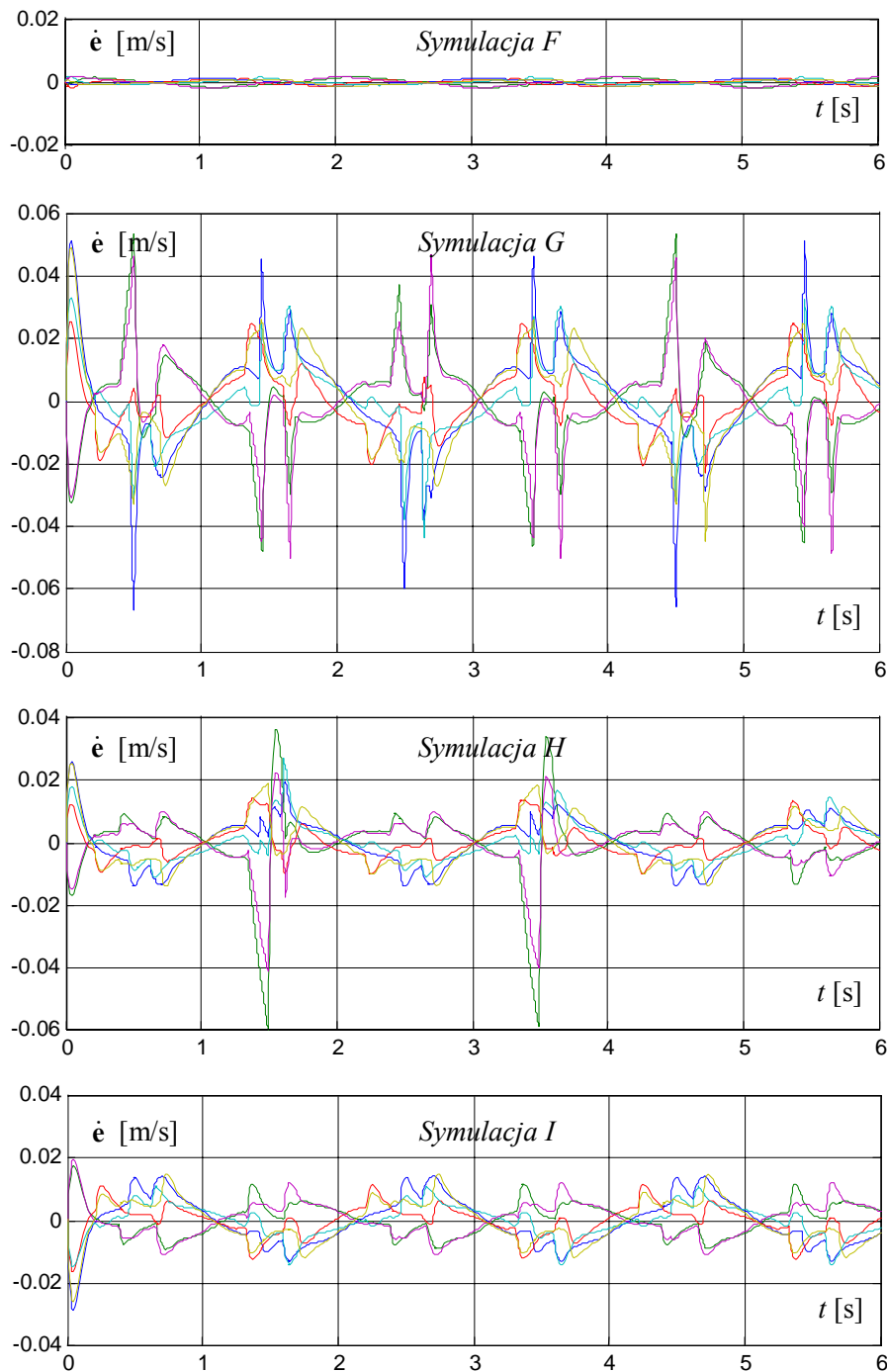
Symulacja A odpowiada sytuacji, w której model dynamiki odwrotnej wykorzystywany przez układ sterowania odpowiada dokładnie dynamice manipulatora. Jak widać, uchyby położenia i prędkości są niemal zerowe. Podczas symulacji B siłowniki manipulatora nie były już traktowane jako nieważkie, zatem model dynamiki używany przez układ sterowania nie był w pełni zgody z dynamiką manipulatora. Podczas symulacji C uwzględniono tarcie w siłownikach, lecz nie uwzględniano go w obliczeniach dotyczących sterowania. Porównanie wyników symulacji A, B i C pozwala stwierdzić, że nieuwzględnianie tarcia powoduje znacznie większe problemy ze sterowaniem, niż pominięcie mas siłowników.



Rys.6. Symulacje E i F: przebiegi uchybów położenia

Problemy wynikające z nieuwzględniania w modelu dynamiki odwrotnej mas siłowników można w znacznym stopniu zneutralizować, wprowadzając korektę masy platformy. Przebieg błędów pozycji dla symulacji E, w której nie dokonano korekty masy platformy pokazano na rysunku 6. Warto zauważyć, że błędy oscylują wokół wartości ok. 1.5 mm. Na tym samym rysunku pokazano przebieg błędów pozycji dla symulacji F, która różni się od poprzedniej tym, że masę platformy powiększono o masy tłoków wraz z tłoczyskami. Łatwo

zauważyć, że tym razem że błędy oscylują wokół wartości bliskiej zero. Warto zwrócić uwagę, że amplitudy oscylacji błędów pozycjonowania są w obu wypadkach zbliżone.



Rys.7. Symulacje F, G, H oraz I: przebiegi uchybów prędkości

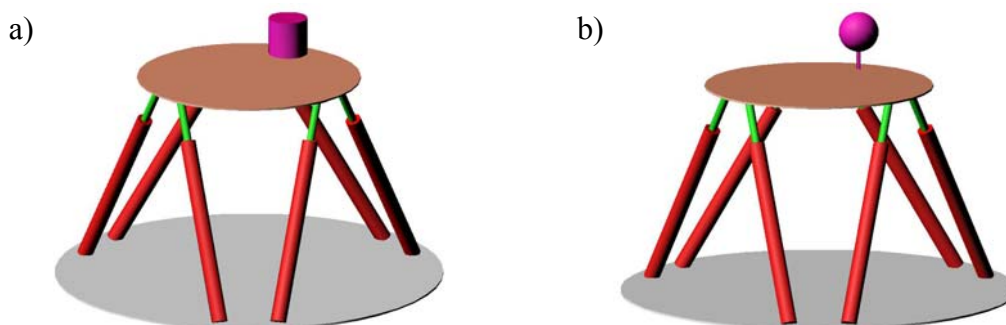
Problemy ze sterowaniem wynikające z występowania tarcia w siłownikach można zmniejszyć, uwzględniając siły tarcia w modelu dynamiki wykorzystywanym przez układ sterowania. Należy jednak pamiętać, że tarcie jest zjawiskiem złożonym, a jego modele są z konieczności uproszczone. Ponadto parametry opisujące tarcie są trudne do zmierzenia i często zmienne w czasie. Zatem nie należy się spodziewać, że model tarcia wykorzystywany przez układ sterowania będzie wykazywał dużą zgodność z tarcie występującym

w rzeczywistym obiekcie sterownia. Przeprowadzono serię symulacji sprawdzających, jaki jest wpływ sił tarcia na uzyskiwaną jakość sterowania.

Symulacja F odpowiada sytuacji, w której model tarcia wykorzystywany przez układ sterowania wykazuje dużą zgodność z tarcieniem obserwowanym w manipulatorze. Symulacja G odpowiada sytuacji, w której tarcie występowało w manipulatorze, lecz było pomijane przez jego układ sterowania. Błędy wynikające z pominięcia tarcia są szczególnie dobrze widoczne (w postaci charakterystycznych „pików”) na wykresach uchybu prędkości, pokazanych na rysunku 7. Największe problemy sprawia tarcie suche, pojawiające się przy prędkościach siłowników bliskich zeru. Symulacja H odpowiada sytuacji, w której model tarcia jest wykorzystywany przez układ sterowania, ale jego parametry są niedoszacowane (o połowę mniejsze) w stosunku do tarcia występującego w manipulatorze. Widoczna jest pewna poprawa jakości sterowania, ale problemy z tarcieniem suchym są nadal wyraźnie widoczne. Symulacja I odpowiada sytuacji, w której siły tarcia obliczane przez model dynamiki odwrotnej stosowany w układzie sterowania są większe (o 50%) od występujących w manipulatorze. Obserwowane uchyby prędkości są w tym wypadku większe niż w symulacji F, ale jednocześnie znacznie mniejsze niż w symulacji G.

Symulację J przeprowadzono, by zbadać skutki niedokładnego oszacowania parametrów geometrycznych platformy. Podczas tej symulacji przyjęto, że rzeczywiste wymiary manipulatora różnią się o 1% od wymiarów nominalnych, wykorzystywanych przez układ sterowania. Stwierdzono, że stosunkowo niewielkie zmiany wartości parametrów geometrycznych prowadzą do powstawania dość znacznych uchybów sterowania. Uchyby średnie podane w tabeli 1 są obliczane na podstawie błędów pozycji i prędkości siłowników. Warto jednak pamiętać, że w wypadku symulacji J najbardziej znaczące są błędy pozycji i prędkości platformy ruchomej w przestrzeni kartezjańskiej. Niedokładne oszacowanie parametrów geometrycznych mechanizmu skutkuje tym, że dokładne ruchy siłowników nie przekładają się na równie precyzyjny ruch platformy.

Model dynamiki wykorzystywany przez układ sterowania manipulatorem dostosowany jest do przeciętnego przewidywanego obciążenia manipulatora. Zmiany rzeczywistego obciążenia platformy ruchomej traktowane są jako zakłócenia, z którymi musi sobie radzić układ sterowania. By zbadać wpływ obciążenia manipulatora ładunkiem na uzyskiwaną jakość regulacji przeprowadzono symulacje K oraz L. W pierwszym wypadku obciążenie platformy w postaci walca o masie 50 kg było sztywno przymocowane do platformy ruchomej. W przypadku drugim (symulacja L) do platformy przymocowano podtrzymywane przez układ sprężyn i tłumików wahadło o masie 30 kg i długości 0.2 m, tworzące z platformą parę sferyczną. Takie podatne zamocowanie ładunku pozwoliło na zbadanie pracy układu sterowania przy zmiennym obciążeniu manipulatora. Oba zmodyfikowane modele manipulatora pokazano na rysunku 8.

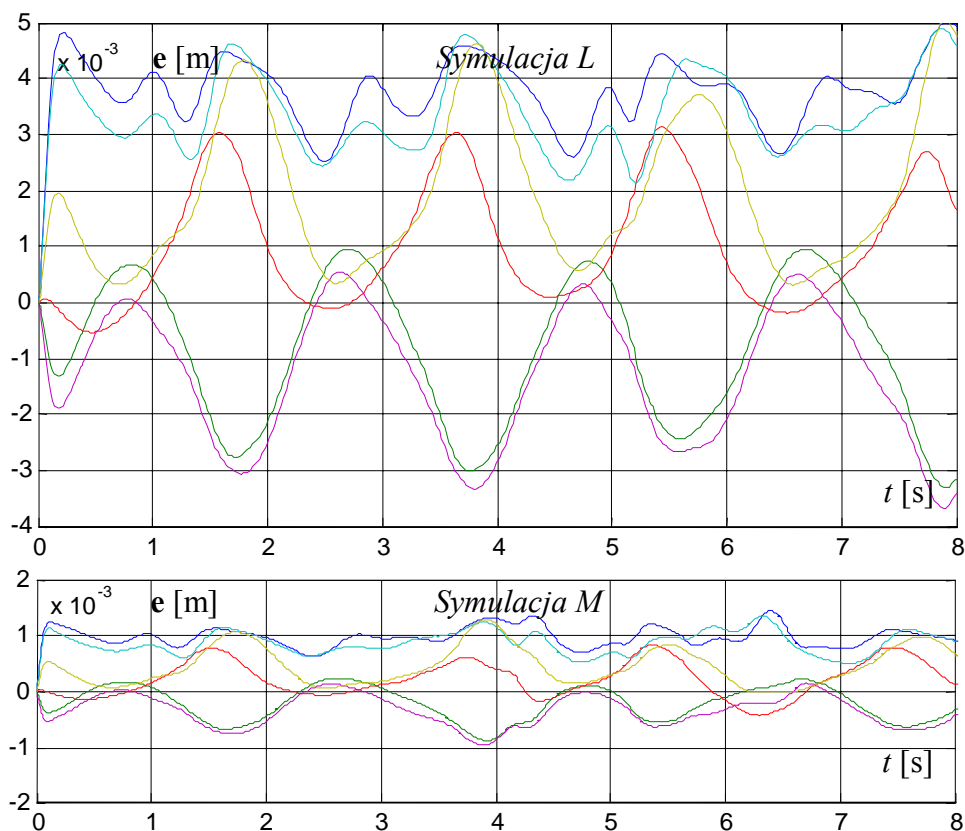


Rys. 8. Modele wykorzystane podczas symulacji K (a), L oraz M (b)



Wyniki symulacji L pokazano na rysunku 9. Jest widoczne, że przebieg uchybu położenia nie stabilizuje się w postaci zbliżonej do funkcji okresowej (co było obserwowane w innych symulacjach). Jest to wynik zmiennego w czasie obciążenia platformy spowodowanego ruchami wahadła. Ponadto uchyby położenia są większe od obserwowanych w przypadku symulacji F (rysunek 6). Należy jednak podkreślić, że dodatkowe masy 50 kg lub 30 kg są stosunkowo duże w porównaniu z masą platformy ruchomej (300 kg). W rezultacie obserwowane uchyby sterowania są również stosunkowo duże.

We wszystkich omówionych wcześniej symulacjach wzmocnienia charakteryzujące układ sterowania były następujące:  $k_p = 64\pi^2$  i  $k_v = 16\pi$ . Właściwy dobór parametrów  $k_p$  i  $k_v$  ma zasadniczy wpływ na uzyskiwaną jakość regulacji, często większy niż rozważane przez nas uproszczenia w modelu dynamiki odwrotnej stosowanym w układzie sterowania. Pokazuje to symulacja M, która od symulacji L różni się jedynie wzmocnieniami. Tym razem w obliczeniach użyto wartości  $k_p = 256\pi^2$  i  $k_v = 32\pi$ . Spadek wielkości błędów pozycjonowania podczas symulacji M jest wyraźnie widoczny na rysunku 9.



Rys. 9. Symulacje L oraz M: przebiegi uchybów położenia

## 7. UWAGI KOŃCOWE

Opracowany model symulacyjny manipulatora równoległego wraz z napędem hydraulicznym i układem sterowania umożliwia analizę różnych zagadnień związanych z pracą urządzenia. Skoncentrowano się na zbadaniu wpływu uproszczeń w modelu dynamiki odwrotnej wykorzystywanym przez układ sterowania, a także wpływu niedokładnego oszacowania wartości parametrów modelu, na uzyskiwaną jakość sterowania.

Przeprowadzone badania symulacyjne wykazały, że uproszczenia modelu dynamiki odwrotnej polegające na pominięciu mas siłowników mają stosunkowo niewielki wpływ na

przebiegi uchybu pozycjonowania i jeszcze mniejszy na uchyb prędkości. Stwierdzono też, że problemy wynikające z nieuwzględniania w modelu dynamiki odwrotnej mas siłowników można w znacznym stopniu zneutralizować, wprowadzając odpowiednią korektę masy platformy.

Badania symulacyjne wykazały, że uwzględnienie w modelu dynamiki odwrotnej sił tarcia ma istotny wpływ na uzyskiwaną jakość sterowania. Stwierdzono, że parametry opisujące tarcie powinny być znane ze stosunkowo dużą dokładnością. Jeżeli model tarcia wykorzystywany przez układ sterowania nie opisuje tarcia w manipulatorze z odpowiednią dokładnością, to jego uwzględnianie w układzie sterowania nie daje istotnych efektów. Badania wykazały także, że najistotniejsza jest identyfikacja i prawidłowe modelowanie tarcia suchego.

Należy zwrócić uwagę, że prezentowane symulacje nie odbywały się w czasie rzeczywistym. Rozwiązywanie zadania prostego dynamiki w pakiecie przeznaczonym do analizy układów wieloczłonowych wymaga bowiem kosztownego numerycznie całkowania równań ruchu. Warto jednak podkreślić, że kiedy miejsce modelu wieloczłonowego zajmie rzeczywisty manipulator ilość niezbędnych obliczeń zmniejszy się radykalnie. Procedury wykorzystywane w modelu układu sterowania (zadanie proste kinematyki, uproszczone zadanie odwrotne kinematyki i procedury do obliczania prądu sterującego) będzie można zaimplementować w sterowniku pracującym w czasie rzeczywistym. Stwierdzono bowiem, że w ich przypadku łączny czas wykonywania obliczeń wynosi ok. 10 ms i jest dostatecznie mały by spełnić wymagania układu sterowania w czasie rzeczywistym.

Na zakończenie warto podkreślić, że opracowany model symulacyjny można łatwo rozbudować, np. po to by w sposób realistyczny uwzględnić oddziaływanie manipulatora z otoczeniem.

## PODZIĘKOWANIA

Praca została sfinansowana przez EPAN Cooperation Program 4.3.6.1 (Greece-Poland) of the Hellenic General Secretariat for Research and Technology oraz ze środków przeznaczonych na badania własne w ITLiMS PW w ramach pracy 503G/0387/007.

## LITERATURA

- [1] Angeles J. *Fundamentals of Robotic Mechanical Systems*. Springer Science+Business Media, 3<sup>rd</sup> Edition, 2007.
- [2] Blackburn J.F., Reethof G., Shearer J.L. *Fluid Power Control*. Cambridge, MA: MIT Press, 1960.
- [3] Davliakos, I., Zafiris, A., and Papadopoulos, E. Joint Space Controller Design for Electrohydraulic Servos. Proc. 2006 IEEE International Symposium on Computer-Aided Control Systems Design, (CACSD '06), pp. 796-801, October 4-6, 2006.
- [4] Davliakos, I. and Papadopoulos, E. Invariant Error Dynamics Controller for a 6-dof Electrohydraulic Stewart Platform. Proc. 6th CISM-IFTOMM Symposium on Robot Design, Dynamics, and Control, (ROMANSY '06). Warsaw, Poland, June 20-24, 2006.
- [5] Davliakos, I., Chatzakos, P., and Papadopoulos, E. Development of a Model-based Impedance Controller for Electrohydraulic Servos, Proc. International Conference on Robotics and Applications, Oct. 31-Nov. 2, Cambridge, MA, USA, 2005.

- [6] Merritt H. E. *Hydraulic Control Systems*. J. Wiley, 1967.
- [7] Thayer W.J. *Specification Standards for Electrohydraulic Flow Control Servovalves*. Technical Bulletin 117, Moog Incorporation Control Division, E. Aurora, New York, 1962.
- [8] Tsai L.-W. *Robot Analysis. The Mechanics of Serial and Parallel Manipulators*. John Wiley & Sons Inc., New York, 1999.