Δυναμική Ρομποτικών Συστημάτων

Ι. Πουλακάκης

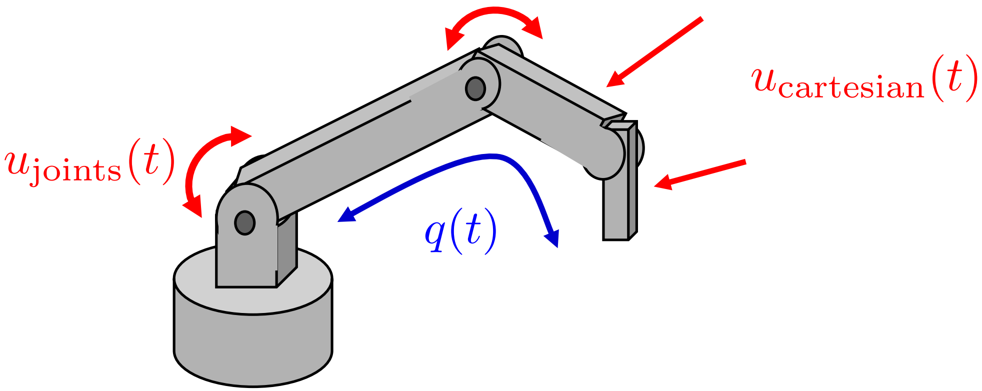
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
poulakas@mail.ntua.gr

Δυναμικό μοντέλο

Παρέχει τη **σχέση** μεταξύ:

των γενικευμένων δυνάμεων $u(t)$ που ασκούνται στο ρομπότ

της επακόλουθης κίνησης $q(t)$ του ρομπότ

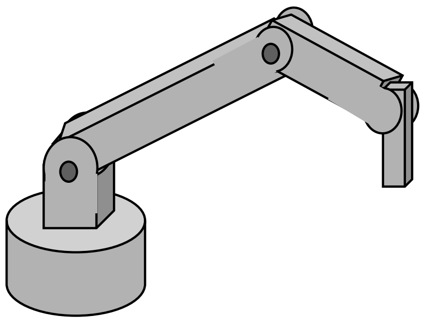


Σύστημα διαφορικών εξισώσεων 2ης τάξης : $\boxed{\Phi(q(t), \dot{q}(t), \ddot{q}(t)) = u(t)}$

Ευθεία δυναμική

- Ευθεία σχέση :

$$u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix}$$



$$q(t) = \begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_n(t) \end{pmatrix}$$

είσοδος για $t \in [0, T]$ + $q(0), \ \dot{q}(0)$ επακόλουθη κίνηση

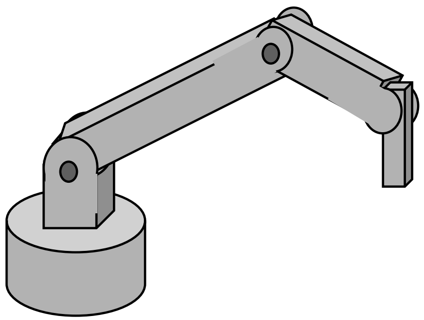
αρχικές συνθήκες για $t = 0$

- Πειραματικά:
  - Εφαρμόζουμε ροπές/δυνάμεις με τους επενεργητές του ρομπότ και μετράμε την επακόλουθη κίνηση των αρθρώσεων (π.χ. μέσω encoders)

- Σε simulation: $\longleftrightarrow$ $\boxed{\Phi(q(t), \dot{q}(t), \ddot{q}(t)) = u(t)}$
  - Χρησιμοποιούμε το δυναμικό μοντέλο και ολοκληρώνουμε (αριθμητικά) τις αντίστοιχες διαφορικές εξισώσεις

Αντίστροφη δυναμική

- Αντίστροφη σχέση:

$q_{\mathrm{d}}(t),\ \dot{q}_{\mathrm{d}}(t),\ \ddot{q}_{\mathrm{d}}(t)$ →  → $u_{\mathrm{d}}(t)$

επιθυμητή κίνηση
για $t \in [0, T]$

Απαιτούμενες ροπές / δυνάμεις για $t \in [0, T]$

- Πειραματικά:
  – π.χ. με επαναλαμβανόμενα πειράματα ευθείας δυναμικής χρησιμοποιώντας το $u_k(t)$ και επαναληπτική μάθηση των ονομαστικών τιμών ροπής στην επανάληψη $k+1$ βάσει του σφάλματος στο $[0, T]$ μετρούμενο στην επανάληψη k: $\lim_{k\to\infty} u_k(t) = u(t)$
- Αναλυτικά:
  – Χρησιμοποιούμε το δυναμικό μοντέλο και υπολογίζουμε (αλγεβρικα) τις τιμές των δυνάμεων και ροπών σε κάθε χρονική στιγμή

Μεθοδολογίες δυναμικής μοντελοποίησης

Μέθοδος Euler-Lagrange
(βασισμένη στην ενέργεια)

$\rightleftharpoons$

Μέθοδος Newton-Euler
(βασισμένη σε ισοζύγιο
δυνάμων ροπών

- Δυναμικές εξισώσεις σε συμβολική/κλειστή μορφή
- Χρήσιμη για την ανάλυση δυναμικών χαρακτηριστικών του ρομπότ και τη σύνθεση νόμων ελέγχου

- Δυναμικές εξισώσεις σε αριθμητική/
- Χρήσιμη για την εφαρμογή νόμων ελέγχου βασισμένων στην αντίστροφη δυναμική σε πραγματικό χρόνο

- Υπάρχουν και άλλες μέθοδοι βασισμένες σε αρχές της μηχανικής που χρησιμοποιούνται για την κατασκευή του δυναμικού μοντέλου ενός ρομπότ
  – π.χ. αρχή του d'Alembert, αρχή του Hamilton, αρχή των δυνατών έργων, μέθοδος του Kane ….

Η μέθοδος Euler-Lagrange

Βασική παραδοχή: Οι σύνδεσμοι (links) του ρομπότ μοντελοποιούνται σαν **στερεά σώματα** (+ «συγκεντρωμένη» ελαστικότητα μπορεί να προστεθεί μέσω ελατηρίων στις αρθρώσεις)

$$q \in \mathbb{R}^n$$

$$q = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_n \end{bmatrix}^T$$

γενικευμένες συντεταγμένες (π.χ. μεταβλητές αρθρώσεων, και όχι μόνο!)

Λαγκρανζιανή $\boxed{L(q,\dot{q}) = T(q,\dot{q}) - U(q)}$

κινητική ενέργεια – δυναμική ενέργεια

- Αρχή της ελάχιστης δράσης του Hamilton
- Αρχή των δυνατών έργων

Εξισώσεις Euler-Lagrange

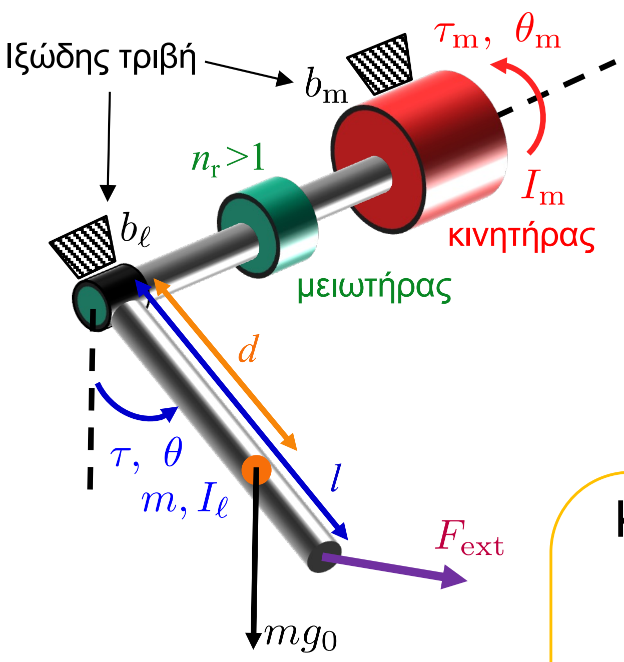
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = u_i, \quad i = 1, ..., n$$

μη συντηρητικές δυνάμεις (κινητήρες + δυνάμεις αλληλεπίδρασης)

Γενικευμένες δυνάμεις που παράγουν έργο στις q_i

Παράδειγμα 1 (Δυναμική ενεργούμενου εκκρεμούς)

[3D όψη]



Μειωτήρας: $\dot{\theta}_\mathrm{m} = n_\mathrm{r}\dot{\theta} \Rightarrow \theta_\mathrm{m} = n_\mathrm{r}\theta + \theta_{\mathrm{m},0}$

$$\tau = n_\mathrm{r}\tau_\mathrm{m}$$

Γενικ. συν/νες: $q = \theta$

(εναλλακτικά $q = \theta_\mathrm{m}$)

Κινητική ενέργεια: $T = T_\mathrm{m} + T_\ell$

Κιν. Ενέργεια κινητήρα:

$$T_\mathrm{m} = \frac{1}{2} I_\mathrm{m} \dot{\theta}_\mathrm{m}^2$$

αδράνεια κινητήρα
(ως προς τον άξονα περιστροφής του)

Κιν. Ενέργεια συνδέσμου:

$$T_\ell = \frac{1}{2}(I_\ell + md^2)\dot{\theta}^2$$

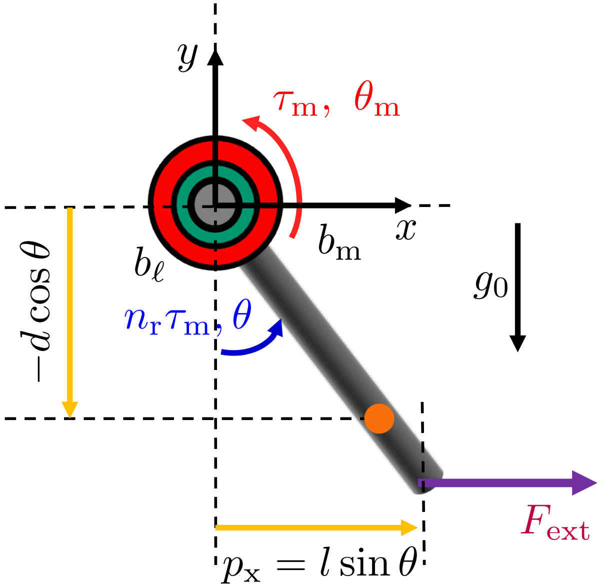
αδράνεια συνδέσμου
(ως προς άξονα z διερχόμενου από το κέντρο μάζας…)

(…+ ως προς || άξονα διερχόμενου από τη βάση)

Συνολική κινητική ενέργεια : $T = \frac{1}{2}(I_\ell + md^2 + I_\mathrm{m} n_\mathrm{r}^2)\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2$

Παράδειγμα 1 (Δυναμική ενεργούμενου εκκρεμούς, συνέχ.)

[2D όψη]



$$\boxed{\dot{p}_{\mathrm{x}} = l\cos\theta\cdot\dot{\theta} = J_{\mathrm{x}}\dot{\theta}}$$

Δυναμική ενέργεια: $U = U_0 - mg_0 d\cos\theta$

$$L = T - U = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + mg_0 d\cos\theta - U_0$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = I\dot{\theta} \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = I\ddot{\theta} \qquad \frac{\partial L}{\partial\theta} = -mg_0 d\sin\theta$$

Άθροισμα μη συντηρητικών δυνάμεων:

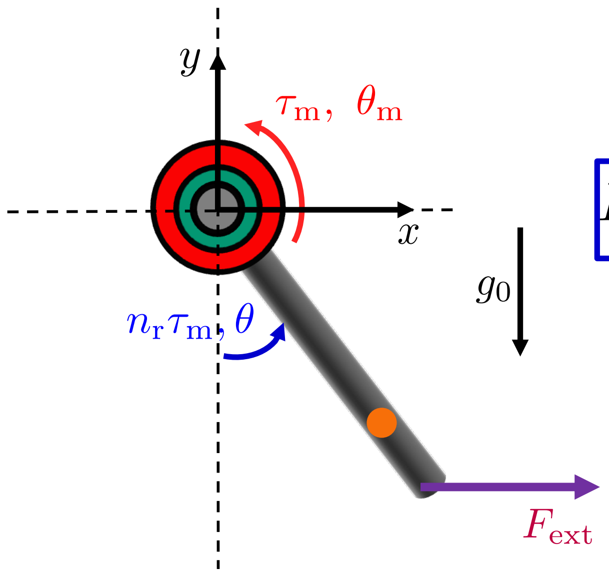
$$u = n_{\mathrm{r}}\tau_{\mathrm{m}} - b_\ell\dot{\theta} - n_{\mathrm{r}}b_{\mathrm{m}}\dot{\theta}_{\mathrm{m}} + J_{\mathrm{x}}^{\mathsf{T}}F_{\mathrm{x}} = n_{\mathrm{r}}\tau_{\mathrm{m}} - (b_\ell + b_{\mathrm{m}}n_{\mathrm{r}}^2)\dot{\theta} + l\cos\theta F_{\mathrm{x}}$$

Κινητήριες ροπές και ροπές απόσβεσης στην πλευρά του κινητήρα (*πριν* τον μειωτήρα) πολλαπλασιάζονται με n_{r} όταν μεταφέρονται στην πλευρά του συνδέσμου

«Ισοδύναμη» ροπή εξ' αιτίας της εξωτερικής δύναμης F_{ext} που εφαρμόζεται στο άκρο p_{x} του εκκρεμούς

Παράδειγμα 1 (Δυναμική ενεργούμενου εκκρεμούς, συνέχ.)

[2D όψη]



Δυναμικό μοντέλο σε συν/νες $q = \theta$

$$\boxed{I\ddot{\theta} + mg_0 d\sin\theta = n_{\mathrm{r}}\tau_{\mathrm{m}} - (b_\ell + b_{\mathrm{m}} n_{\mathrm{r}}^2)\dot{\theta} + l\cos\theta\cdot F_{\mathrm{ext}}}$$

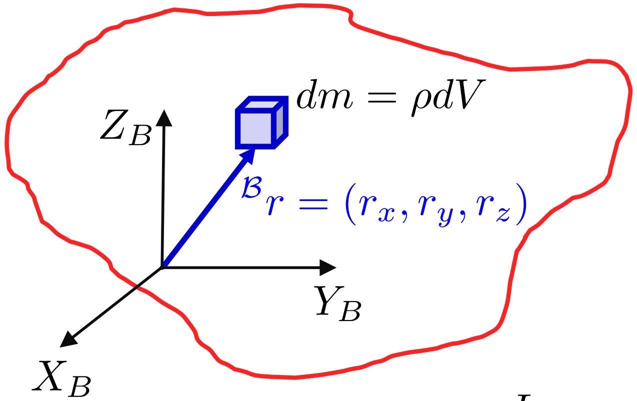
Διαιρώντας με n_{r} και αντικαθιστώντας $\theta = \theta_{\mathrm{m}}/n_{\mathrm{r}}$

Δυναμικό μοντέλο σε συν/νες $q = \theta_{\mathrm{m}}$

$$\boxed{\frac{I}{n_{\mathrm{r}}^2}\ddot{\theta}_{\mathrm{m}} + \frac{m}{n_{\mathrm{r}}} g_0 d\sin\frac{\theta_{\mathrm{m}}}{n_{\mathrm{r}}} = \tau_{\mathrm{m}} - \left(\frac{b_\ell}{n_{\mathrm{r}}^2} + b_{\mathrm{m}}\right)\dot{\theta}_{\mathrm{m}} + \frac{l}{n_{\mathrm{r}}}\cos\frac{\theta_{\mathrm{m}}}{n_{\mathrm{r}}}\cdot F_{\mathrm{ext}}}$$

Μητρώα αδρανείας στερεών σωμάτων

Μητρώο αδρανείας σε σχέση με σωματόδετο ΣΣ $\mathcal{B} = \{X_B, Y_B, Z_B\}$



$$
{}^{\mathcal{B}}I = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}
$$

(Τα στοιχεία του ${}^{\mathcal{B}}I$ εξαρτώνται από το ΣΣ και είναι σταθερά για δεδομένο ΣΣ)

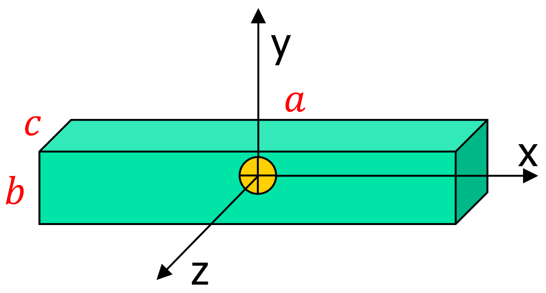
$$
I_{xx} = \int_V (r_y^2 + r_z^2)\rho dV \quad I_{yy} = \int_V (r_x^2 + r_z^2)\rho dV \quad I_{zz} = \int_V (r_x^2 + r_y^2)\rho dV
$$

$$
I_{xy} = \int_V r_x r_y \rho dV \quad I_{xz} = \int_V r_x r_z \rho dV \quad I_{yz} = \int_V r_y r_z \rho dV
$$

Με κατάλληλη επιλογή ΣΣ:
$I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$ ➡ Κύριοι άξονες αδρανείας & διαγώνιο μητρώο αδρανείας!

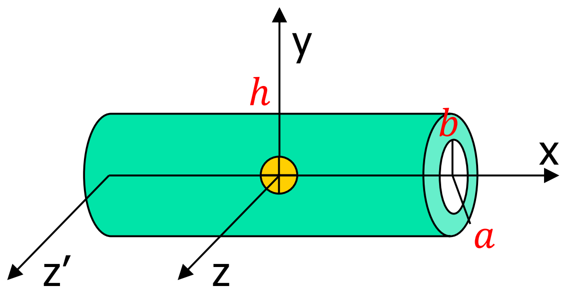
Αλλαγή αξόνων (μετα/σμοί ομοιότητας) ➡ ${}^0I_i(q) = {}^0R_i^{\mathsf{T}}(q)\ {}^iI_i(q)\ {}^0R_i(q)$

Ομογενή συμμετρικά σώματα



Παραλληλεπίπεδο με πλευρές a, b, c

$$I_c = \begin{bmatrix} I_{xx} & & \\ & I_{yy} & \\ & & I_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{12}m(b^2+c^2) & & \\ & \frac{1}{12}m(a^2+c^2) & \\ & & \frac{1}{12}m(a^2+b^2) \end{bmatrix}$$



Κύλινδρος μήκους h, με εξωτερική/εσωτερική ακτίνα a, b

$$I_c = \begin{bmatrix} \frac{1}{12}m(a^2+b^2) & & \\ & \frac{1}{12}m\left(3(a^2+b^2)+h^2\right) & \\ & & I_{zz} \end{bmatrix} \qquad I_{zz} = I_{yy}$$

$$I'_{zz} = I_{zz} + m\left(\frac{h}{2}\right)$$

Θεώρημα παράλληλης μεταφοράς αξόνων…

Θεώρημα Steiner (παράλληλης μεταφοράς):

$$I = I_c + m(r^{\mathsf{T}} r \cdot E_{3\times 3} - r r^{\mathsf{T}}) = I_c + m \cdot [r^\times]^{\mathsf{T}}[r^\times]$$

Μητρώο αδρανείας σχετικά με το κέντρο μάζας (CoM)

Μοναδιαίος 3x3 πίνακας

Αντισυμμετρικός πίνακας

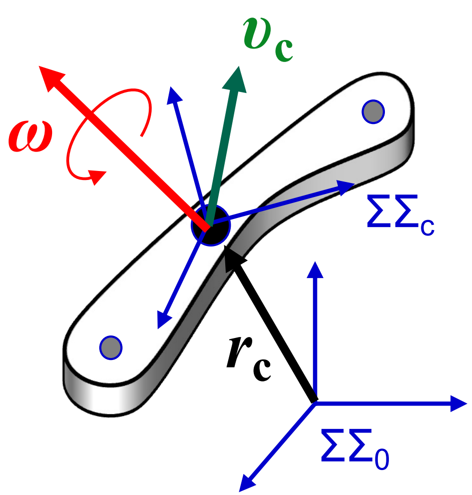
… γενίκευση:

μεταβολή μητρώου αδρανείας λόγω παράλληλης μεταφοράς του συστήματος αναφοράς κατά r

$$[r]^\times = \begin{bmatrix} 0 & -r_z & r_y \\ r_z & 0 & -r_x \\ -r_y & r_x & 0 \end{bmatrix}$$

Κινητική ενέργεια στερεού σώματος

Στερεό σώμα



ΣΣ$_c$: κεντροβαρικό

ΣΣ$_0$: αναφοράς

πυκνότητα

Μάζα $$m = \int_B \rho(x,y,z)dxdydz = \int_B dm$$

Θέση κέντρου μάζας (CoM) $$r_c = \frac{1}{m}\int_B r dm$$

Όταν όλα τα διανύσματα **αναφέρονται** σε σωματόδετο ΣΣ$_c$ τοποθετημένο στο κέντρο μάζας:

$$r_c = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_B r dm = 0$$

Κινητική ενέργεια $$T = \frac{1}{2}\int_B \|v(x,y,z)\|^2 dm = \frac{1}{2}\int_B v(x,y,z)^{\mathsf{T}} v(x,y,z) dm$$

(Θεμελιώδης) κινηματική εξίσωση στερεού σώματος $$v = v_c + \omega \times r = v_c + [\omega^{\times}]r$$

Κινητική ενέργεια στερεού σώματος(συνεχ.)

$$T = \frac{1}{2}\int_B \left(v_c + [\omega^\times]r\right)^\mathsf{T}\left(v_c + [\omega^\times]r\right)dm$$

$$= \frac{1}{2}\int_B v_c^\mathsf{T} v_c dm + \int_B v_c^\mathsf{T}[\omega^\times] r dm + \frac{1}{2}\int_B r^\mathsf{T}[\omega^\times]^\mathsf{T}[\omega^\times] r dm$$

$$\boxed{= \frac{1}{2} m v_c^\mathsf{T} v_c}$$

$$= v_c^\mathsf{T}[\omega^\times]\int_B r dm = 0$$

$$= \frac{1}{2}\int_B \omega^\mathsf{T}[r^\times]^\mathsf{T}[r^\times]\omega dm$$

$$= \frac{1}{2}\omega^\mathsf{T}\left(\int_B [r^\times]^\mathsf{T}[r^\times] dm\right)\omega$$

$$\boxed{= \frac{1}{2}\omega^\mathsf{T} I_c \omega}$$

Μεταφορική κινητική ενέργεια (μάζα συγκεντρωμένη στο κέντρο μάζας)

\+

Περιστροφική κινητική ενέργεια (ολόκληρου του στερεού σώματος)

Μητρώο αδρανείας σώματος (γύρω από το κέντρο μάζας)

$$T = \frac{1}{2} m v_c^\mathsf{T} v_c + \frac{1}{2}\omega^\mathsf{T} I_c \omega$$

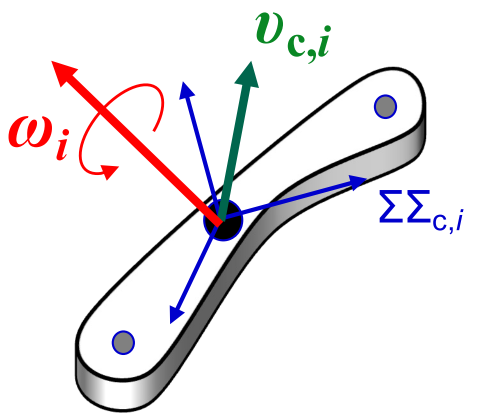
Κινητική ενέργεια ρομποτικού βραχίονα

$$T = \sum_{i=1}^{n} T_i$$

n στερεά σώματα

$$T_i = T_i\left(q_j, \dot{q}_j \mid j \leq i\right)$$

ανοιχτή κινηματική αλυσίδα



σύνδεσμος i του ρομπότ

$$T_i = \frac{1}{2} m_i v_{c,i}^{\mathsf{T}} v_{c,i} + \frac{1}{2} \omega_i^{\mathsf{T}} I_{c,i} \omega_i$$

Απόλυτη ταχύτητα του κέντρου μάζας (CoM)

Απόλυτη γωνιακή ταχύτητα ολόκληρου του σώματος

Κινητική ενέργεια ρομποτικού συνδέσμου

$$T_i = \frac{1}{2} m_i v_{\mathrm{c},i}^{\mathsf{T}} v_{\mathrm{c},i} + \frac{1}{2} \omega_i^{\mathsf{T}} I_{\mathrm{c},i} \omega_i$$

$\omega_i, I_{\mathrm{c},i}$ εκφράζονται στο **ίδιο σύστημα συν/νων**, όμως το γινόμενο $\omega_i^{\mathsf{T}} I_{\mathrm{c},i} \omega_i$ παραμένει **«αναλλοίωτο»** σχετικά με οποιοδήποτε ΣΣ

$$ {}^0\omega_i^{\mathsf{T}}\ {}^0I_{\mathrm{c},i}(q)\ {}^0\omega_i = \left({}^0R_i(q)\ {}^i\omega_i\right)^{\mathsf{T}}\ {}^0I_{\mathrm{c},i}(q)\ \left({}^0R_i(q)\ {}^i\omega_i\right) = {}^i\omega_i^{\mathsf{T}}\ \left({}^0R_i^{\mathsf{T}}(q)\ {}^0I_{\mathrm{c},i}(q)\ {}^0R_i(q)\right)\ {}^i\omega_i$$

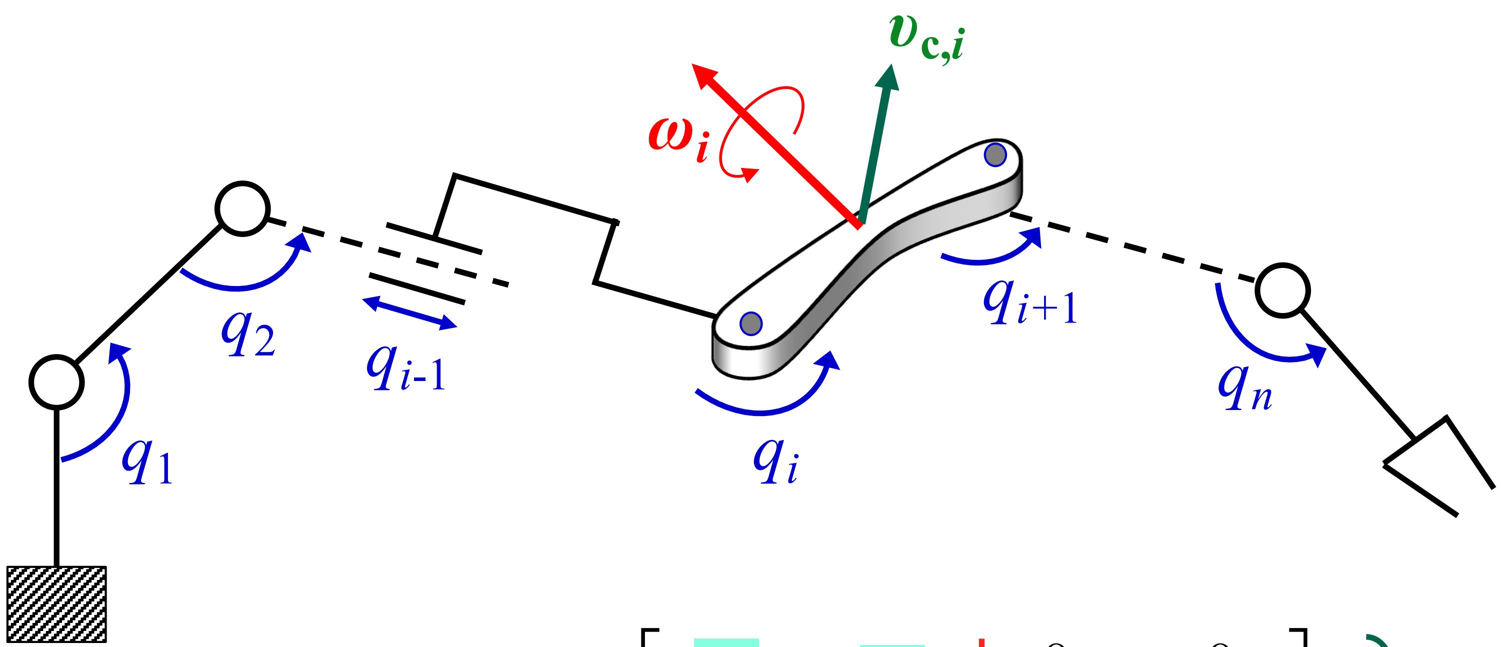
$$= {}^i\omega_i^{\mathsf{T}}\ {}^iI_{\mathrm{c},i}\ {}^i\omega_i \quad \Rightarrow \quad {}^0I_{\mathrm{c},i}(q) = {}^0R_i^{\mathsf{T}}(q)\ {}^iI_{\mathrm{c},i}\ {}^0R_i(q)$$

Ως προς ΣΣ$_{\mathrm{c},i}$ προσαρμοσμένου στο κέντρο μάζας του συνδέσμου *i*

$$ {}^iI_{\mathrm{c},i} = \begin{bmatrix} \int (r_y^2 + r_z^2) dm & -\int r_x r_y dm & -\int r_x r_z dm \\ * & \int r_x^2 + r_z^2) dm & -\int r_y r_z dm \\ * & * & \int r_x^2 + r_y^2) dm \end{bmatrix}$$

Σταθερό

Κινητική ενέργεια και Ιακωβιανές



$$v_{c,i} = J_{L,i}(q)\dot{q} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} & & & 0 & & 0 \\ 1 & \vdots & i & 0 & \vdots & 0 \\ & & & 0 & & 0 \end{array}\right] \dot{q} \quad \left.\vphantom{\begin{array}{c}0\\0\\0\end{array}}\right\} \text{3 γραμμές}$$

Γεωμετρική Ιακωβιανή
(συνήθως εκφρασμένη ως
προς το ΣΣ βάσης)

$$\omega_i = J_{A,i}(q)\dot{q} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} & & & 0 & & 0 \\ 1 & \vdots & i & 0 & \vdots & 0 \\ & & & 0 & & 0 \end{array}\right] \dot{q} \quad \left.\vphantom{\begin{array}{c}0\\0\\0\end{array}}\right\} \text{3 γραμμές}$$

Κινητική ενέργεια: Τελική έκφραση

$$\boxed{T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(m_i v_{\mathrm{c},i}^{\mathsf{T}} v_{\mathrm{c},i} + \omega_i^{\mathsf{T}} I_{\mathrm{c},i}\omega_i\right)}$$

Σημείωση:
Υπάρχουν καλύτεροι αλγόριθμοι για τον υπολογισμό της κινητικής ενέργειας

$$= \frac{1}{2}\dot{q}^{\mathsf{T}}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i J_{\mathrm{L},i}^{\mathsf{T}}(q) J_{\mathrm{L},i}(q) + J_{\mathrm{A},i}^{\mathsf{T}}(q) I_{\mathrm{c},i}(q) J_{\mathrm{A},i}(q)\right)\dot{q}$$

Ανεξάρτητο του q όταν το ω_i εκφράζεται στο $\Sigma\Sigma_{\mathrm{c},i}$, διαφορετικά:

$${}^{0}I_{\mathrm{c},i}(q) = {}^{0}R_i^{\mathsf{T}}(q)\ {}^{i}I_{\mathrm{c},i}\ {}^{0}R_i(q)$$

$$\boxed{T = \frac{1}{2}\dot{q}^{\mathsf{T}} M(q)\dot{q}}$$

Γενικευμένο μητρώο αδρανείας του ρομπότ:

- **Συμμετρικός πίνακας**
- **Θετικά ορισμένος (αντιστρέψιμος για κάθε q)**

Δυναμική ενέργεια

Για την ώρα, εξετάζουμε μόνο τη συνεισφορά της βαρύτητας

$$U = \sum_{i=1}^{n} U_i$$

n στερεά σώματα

$$U_i = U_i(q_j \mid j \leq i)$$

ανοιχτή κινηματική αλυσίδα

$$U_i = -m_i g^{\mathsf{T}} r_{0,\mathrm{c},i}$$

Διάνυσμα επιτάχυνσης της βαρύτητας

Θέση του κέντρου μάζας του συνδέσμου i

Συνήθως τα διανύσματα εκφράζονται ως προς $\Sigma\Sigma_0$

$$\boxed{\begin{bmatrix} r_{0,\mathrm{c},i} \\ 1 \end{bmatrix} = {}^{0}T_1(q_1)\,{}^{1}T_2(q_2)\cdots{}^{i-1}T_i(q_i)\begin{bmatrix} r_{i,\mathrm{c},i} \\ 1 \end{bmatrix}}$$

Σταθερό ως προς το $\Sigma\Sigma_i$

Σύνοψη

Κινητική ενέργεια $T = \frac{1}{2}\dot{q}^{\mathsf{T}} M(q)\dot{q} = \frac{1}{2}\sum_{i,j} m_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j$

Θετικά ορισμένη τετραγωνική μορφή

$$T \geq 0$$

$$T = 0 \Leftrightarrow \dot{q} = 0$$

Δυναμική ενέργεια $U = U(q)$

Λαγκρανζιανή $L(q,\dot{q}) = T(q,\dot{q}) - U(q)$

Εξισώσεις Euler-Lagrange

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = u_k,} \quad k = 1, \ldots, n$$

Μη συντηρητικές γενικευμένες δυνάμεις που εκτελούν **έργο** στη γενικευμένη συντεταγμένη q_i

Εφαρμογή των εξισώσεων Euler-Lagrange

$$L(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\sum_{i,j} m_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j - U(q)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \sum_j m_{kj}\dot{q}_j \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \sum_j m_{kj}\ddot{q}_j + \sum_{i,j}\frac{\partial m_{kj}}{\partial q_i}\dot{q}_i\dot{q}_j$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k}\dot{q}_i\dot{q}_j - \frac{\partial U}{\partial q_k}$$

ΓΡΑΜΜΙΚΟΙ όροι ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΕΩΝ

ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΟΙ όροι ΤΑΧΥΤΗΤΩΝ

ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΙ όροι ΘΕΣΕΩΝ

Στα “ενδότερα” της k εξίσωσης…

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = u_k$$

$$\sum_j m_{kj}\ddot{q}_j + \sum_{i,j}\left(\frac{\partial m_{kj}}{\partial q_i} - \frac{1}{2}\frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k}\right)\dot{q}_i\dot{q}_j + \frac{\partial U}{\partial q_k} = u_k$$

ανταλλαγή δεικτών i, j εντός αθροίσματος

$$\cdots + \underbrace{\sum_{i,j}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial m_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial m_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k}\right)\dot{q}_i\dot{q}_j}_{c_{kij} = c_{kji}} + \cdots$$

«Σύμβολα Christoffel»

…και ερμηνεία των δυναμικών όρων

$$\boxed{\sum_j m_{kj}(q)\ddot{q}_j} + \boxed{\sum_{i,j} c_{kij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j} + \boxed{\frac{\partial U}{\partial q_k}} = u_k \qquad k = 1, 2, ..., n$$

ΑΔΡΑΝΕΙΑΚΕΣ δυνάμεις

ΦΥΓΟΚΕΝΤΡΕΣ δυνάμεις $(i = j)$
& δυνάμεις **CORIOLIS** $(i \neq j)$

ΒΑΡΥΤΙΚΟΙ όροι $g_k(q)$

$m_{kk}(q) =$ αδράνεια στην k όταν η k επιταχύνει ($m_{kk} > 0$)

$m_{kj}(q) =$ αδράνεια «φαινόμενη» στην k όταν η j επιταχύνει ($= m_{jk}(q)$)

$c_{kii}(q) =$ συντελεστής φυγόκεντρης δύναμης στην k όταν η i κινείται ($c_{iii} = 0 \ \forall i$)

$c_{kij}(q) =$ συντελεστής δύναμης Coriolis στην k όταν η i και η j κινούνται και οι δύο ($c_{kji}(q)$)

Δυναμικό μοντέλο ρομπότ (διανυσματική μορφή)

1.

$$M(q)\ddot{q} + c(q,\dot{q}) + g(q) = u$$

Υπολογίζεται από την T

$$g(q) = \left(\frac{\partial U}{\partial q}\right)^{\mathsf{T}}$$

k συνιστώσα του διανύσματος c

$$c_k(q,\dot{q}) = \dot{q}^{\mathsf{T}} C_k(q)\dot{q}$$

k στήλη του πίνακα $M(q)$

$$C_k(q) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial M_k}{\partial q} + \left(\frac{\partial M_k}{\partial q}\right)^{\mathsf{T}} - \frac{\partial M}{\partial q_k}\right)$$

Συμμετρικός πίνακας

2.

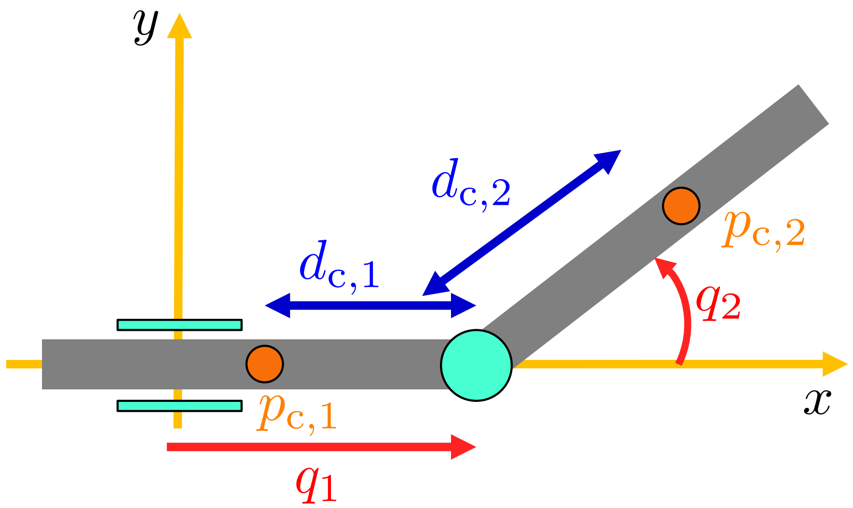
$$M(q)\ddot{q} + S(q,\dot{q})\dot{q} + g(q) = u$$

ΔΕΝ είναι συμμετρικός γενικά

$$s_{kj}(q,\dot{q}) = \sum_i c_{kij}(q)\dot{q}_i$$

Μη μοναδική παραγοντοποίηση

Παράδειγμα: Βραχίονας PR



$$T = T_1 + T_2$$

$$U = \text{constant} \Rightarrow g(q) = 0$$

(οριζόντιο επίπεδο)

$$p_{c,1} = \begin{bmatrix} q_1 - d_{c,1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \|v_{c,1}\|^2 = \dot{p}_{c,1}^{\mathsf{T}} \dot{p}_{c,1} = \dot{q}_1^2$$

$$\boxed{T_1 = \frac{1}{2} m_1 \dot{q}_1^2}$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 v_{c,2}^{\mathsf{T}} v_{c,2} + \frac{1}{2} \omega_2^{\mathsf{T}} I_{c,2} \omega_2$$

$$p_{c,2} = \begin{bmatrix} q_1 + d_{c,2} \cos q_2 \\ d_{c,2} \sin q_2 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow v_{c,2} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 - d_{c,2} \sin q_2 \;\dot{q}_2 \\ d_{c,2} \cos \dot{q}_2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \omega_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{T_2 = \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{q}_1^2 + d_{c,2}^2 \dot{q}_2^2 - 2 d_{c,2} \sin q_2 \;\dot{q}_1 \dot{q}_2 \right) + \frac{1}{2} I_{c,2,zz} \dot{q}_2^2}$$

Παράδειγμα: Βραχίονας PR

$$M(q) = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} m_1 + m_2 \\ -m_2 d_{c,2} \sin q_2 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} -m_2 d_{c,2} \sin q_2 \\ I_{c,2,zz} + m_2 d_{c,2}^2 \end{matrix}} \end{bmatrix}$$

$$M_1 \qquad\qquad M_2$$

$$c(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} c_1(q, \dot{q}) \\ c_2(q, \dot{q}) \end{bmatrix}$$

$$c_k(q, \dot{q}) = \dot{q}^\mathsf{T} C_k(q) \dot{q}$$

$$C_k(q) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial M_k}{\partial q} + \left(\frac{\partial M_k}{\partial q}\right)^\mathsf{T} - \frac{\partial M}{\partial q_k}\right)$$

$$C_1(q) = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -m_2 d_{c,2} \cos q_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -m_2 d_{c,2} \cos q_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

$$c_1(q, \dot{q}) = -m_2 d_{c,2} \cos q_2 \;\dot{q}_2^2$$

$$C_2(q) = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 0 & -m_2 d_{c,2} \cos q_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -m_2 d_{c,2} \cos q_2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -m_2 d_{c,2} \cos q_2 \\ -m_2 d_{c,2} \cos q_2 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

$$c_2(q, \dot{q}) = 0$$

$$\begin{bmatrix} m_1 + m_2 & -m_2 d_{c,2} \sin q_2 \\ -m_2 d_{c,2} \sin q_2 & I_{c,2,zz} + m_2 d_{c,2}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -m_2 d_{c,2} \cos q_2 \;\dot{q}_2^2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Δομικές ιδιότητες

Ο πίνακας $\dot{M} - 2S$ είναι αντισυμμετρικός όταν ο S ορίζεται με βάση τα σύμβολα Christoffel

Απόδειξη

$$\dot{m}_{kj} = \sum_i \frac{\partial m_{kj}}{\partial q_i}\dot{q}_i \qquad 2s_{kj} = \sum_i 2c_{kij}\dot{q}_i = \sum_i \left(\frac{\partial m_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial m_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k}\right)\dot{q}_i$$

$$\Rightarrow \quad \dot{m}_{kj} - 2s_{kj} = \sum_i \left(\frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k} - \frac{\partial m_{ki}}{\partial q_j}\right)\dot{q}_i = n_{kj}$$

$$n_{jk} = \dot{m}_{jk} - 2s_{jk} = \sum_i \left(\frac{\partial m_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial m_{ji}}{\partial q_k}\right)\dot{q}_i = -n_{kj}$$

(ο M είναι συμμετρικός)

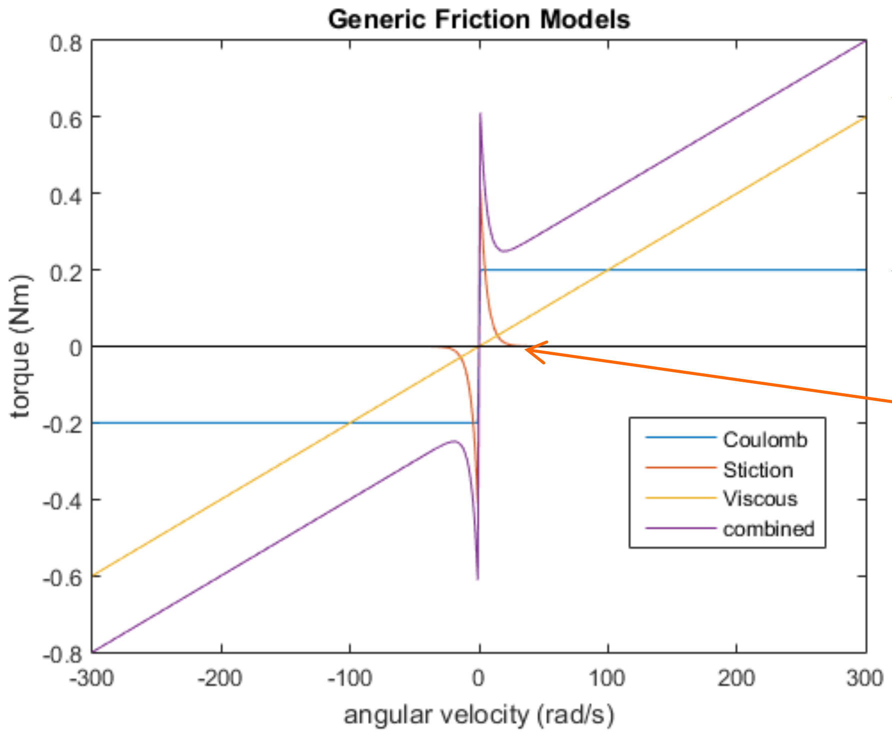
$$\Rightarrow \quad \boxed{x^{\mathsf{T}}(\dot{M} - 2S)x = 0, \quad \forall x}$$

Η ιδιότητα αυτή συνεπάγεται την αρχή διατήρησης της ενέργειας και χρησιμοποιείται στο σχεδιασμό νόμων ελέγχου για βραχίονες

Προσθέτοντας δυναμικούς όρους: Τριβές

- Φαινόμενα απόσβεσης ενέργειας λόγω τριβών στις αρθρώσεις:
  - Ιξώδης τριβή, τριβή Coulomb, κλπ.
  - Τοπικά φαινόμενα στις αρθρώσεις
  - Δύσκολο να μοντελοποιηθούν, εκτός από

$$\boxed{u_{\mathrm{V},i} = -F_{\mathrm{V},i}\dot{q}_i} \qquad \boxed{u_{\mathrm{C},i} = -F_{\mathrm{C},i}\,\mathrm{sgn}(\dot{q}_i)}$$



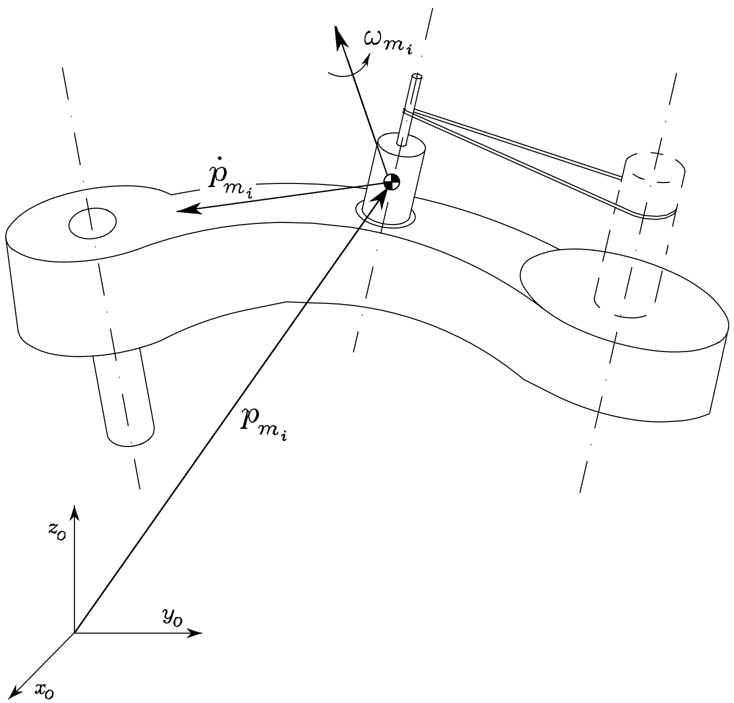
$F_V\dot{q}$

$F_C\, sgn(\dot{q})$

$F_{stiction}$

Προσθέτοντας δυναμικούς όρους: Κινητήρες

- Ενσωμάτωση ηλεκτρικών κινητήρων (θεωρούνται στερεά σώματα)
  - Γενικά ο κινητήρας i τοποθετείται στον σύνδεσμο i-1 (ή πριν)
  - Συχνά (αν και εξαρτάται από το σύστημα μετάδοσης) ο δρομέας του κινητήρα i ευθυγραμμίζεται με τον άξονα της άρθρωσης i
  - Η μάζα του κινητήρα προστίθεται στον σύνδεσμο που φέρει τον κινητήρα
  - Η αδράνεια του δρομέα συνεισφέρει στην κινητική ενέργεια
  - Συχνά η μετάδοση της κίνησης με μειωτήρες με υψηλό λόγο μετάδοσης



$$T_{\mathrm{m}i} = \frac{1}{2} I_{\mathrm{m}i} \dot{\theta}_{\mathrm{m}i}^2 = \frac{1}{2} (I_{\mathrm{m}i} \eta_i^2) \dot{q}_i^2 = \frac{1}{2} B_{\mathrm{m}i} \dot{q}_i^2$$

$$\boxed{T_{\mathrm{m}} = \sum_{i=1}^{n} T_{\mathrm{m}i} = \frac{1}{2} \dot{q}^{\mathsf{T}} B_{\mathrm{m}} \dot{q}}$$

Διαγώνιος, >0

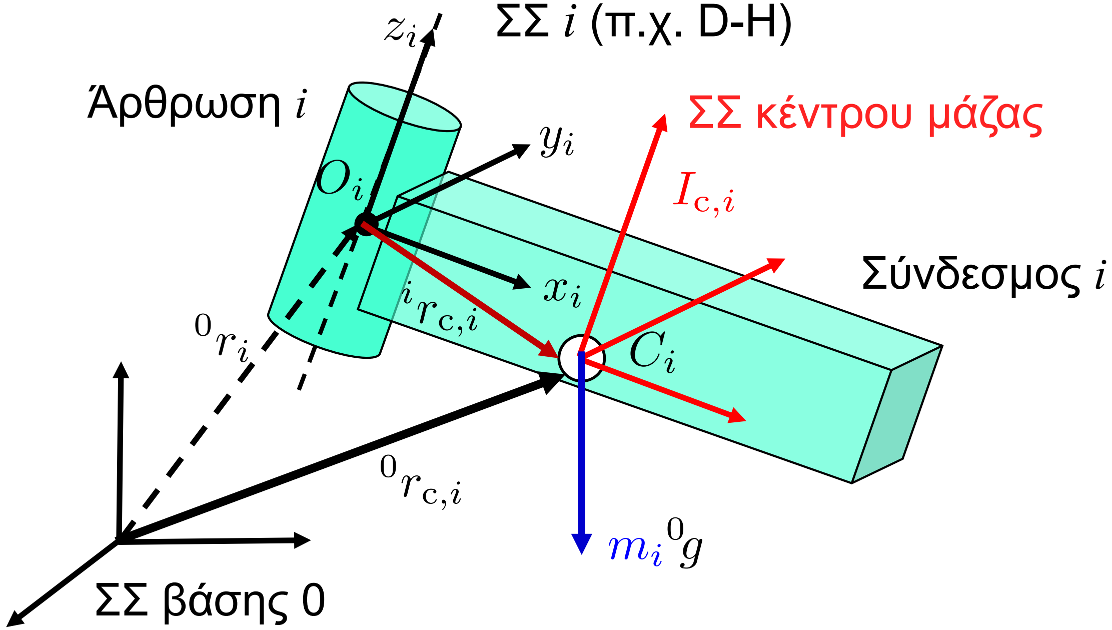
Συνολικό μοντέλο

- Ενσωμάτωση όλων των πρόσθετων όρων

$$(M(q) + B_m)\ddot{q} + c(q, \dot{q}) + g(q) + F_{\mathrm{V}}\dot{q} + F_{\mathrm{C}}\mathrm{sgn}(\dot{q}) = \tau$$

Σταθερός $\longrightarrow$ Δεν συνεισφέρει

Γραμμικότητα ως προς τις δυναμικές παραμέτρους



- Κάθε σύνδεσμος χαρακτηρίζεται από 10 δυναμικές παραμέτρους:

$$m_i \qquad r_{c_i} = \begin{bmatrix} r_{xi} \\ r_{yi} \\ r_{zi} \end{bmatrix} \qquad I_{c,i} = \begin{bmatrix} I_{c,i,xx} & I_{c,i,xy} & I_{c,i,xz} \\ & I_{c,i,yy} & I_{c,i,yz} \\ \text{sym} & & I_{c,i,zz} \end{bmatrix}$$

- Η δυναμική του ρομπότ εξαρτάται από κάποιες από τις παραμέτρους αυτές (πιθανώς μέσω συνδυασμών όπως $I_{c,i,zz} + m_i r_{x,i}^2$)

Γραμμικότητα ως προς τις δυναμικές παραμέτρους

- Η κινητική και η δυναμική ενέργεια μπορούν να γραφούν έτσι ώστε να εξαρτώνται ***γραμμικά*** από κατάλληλα επιλεγμένες **«ομάδες» παραμέτρων**
  - Εκφράζουμε την αδράνεια και τη θέση του κέντρου μάζας κάθε συνδέσμου σε σχέση με γνωστό ΣΣ (που έχει τον ίδιο συνδυασμό με το κεντροβαρικό ΣΣ)

- Θεμελιώδης κινηματική σχέση: $v_{c,i} = v_i + \omega_i \times r_{c,i} = v_i + [\omega_i^\times] r_{c,i} = v_i - [r_{c,i}^\times]\omega_i$

- Κινητική εν. συνδέσμου:

$$T_i = \frac{1}{2} m_i v_{c,i}^\mathsf{T} v_{c,i} + \frac{1}{2}\omega_i^\mathsf{T} I_{c,i}\omega_i$$

$$= \frac{1}{2} m_i \left(v_i - [r_{c,i}^\times]\omega_i\right)^\mathsf{T} \left(v_i - [r_{c,i}^\times]\omega_i\right) + \frac{1}{2}\omega_i^\mathsf{T} I_{c,i}\omega_i$$

$$= \frac{1}{2} m_i v_i^\mathsf{T} v_i + \frac{1}{2}\omega_i^\mathsf{T} \underbrace{\left(I_{c,i} + m_i [r_{c,i}^\times]^\mathsf{T} [r_{c,i}^\times]\right)} \omega_i - v_i^\mathsf{T} [m_i r_{c,i}^\times]\omega_i$$

Θεώρημα Steiner:

$$I_i = \begin{bmatrix} I_{i,xx} & I_{i,xy} & I_{i,xz} \\ & I_{i,yy} & I_{i,yz} \\ \mathrm{sym} & & I_{i,zz} \end{bmatrix}$$

- Δυναμική εν. Συνδέσμου:

$$U_i = -m_i g_0^\mathsf{T} r_{0,ci}$$

$$= -m_i g_0^\mathsf{T} (r_i + r_{ci})$$

$$= -m_i g_0^\mathsf{T} r_i - g_0^\mathsf{T} (m_i r_{ci})$$

Γραμμικότητα ως προς τις δυναμικές παραμέτρους

- Εκφράζοντας διανύσματα και πίνακες σχετικά με το ΣΣ i καταλήγουμε σε εκφράσεις για την κινητική και τη δυναμική ενέργεια που είναι ***γραμμικές*** σε σχέση με τις 10 (σταθερές) παραμέτρους $\pi_i \in \mathbb{R}^{10}$

$$T_i = \frac{1}{2} m_i \, ({}^i v)_i^{\mathsf{T}} ({}^i v_i) + m_i ({}^i r_{c,i})^{\mathsf{T}} [({}^i v_i)^{\times}] + \frac{1}{2} ({}^i \omega_i)^{\mathsf{T}} \, ({}^i I_i) \, ({}^i \omega_i)$$

$$U_i = - m_i \, g_0^{\mathsf{T}} r_i - g_0^{\mathsf{T}} {}^0R_i \, (m_i \, {}^i r_{ci})$$

$$\pi_i = \begin{bmatrix} m_i \\ m_i ({}^i r_{ci}) \\ \mathsf{vect}\{{}^i I_i\} \end{bmatrix}$$

$$= \big[\underbrace{m_i}_{\text{μάζα συνδέσμου } i} \quad \underbrace{m_i({}^i r_{ci,x}) \quad m_i({}^i r_{ci,y}) \quad m_i({}^i r_{ci,z})}_{\text{μάζα} \times \text{θέση ΚΜ συνδέσμου } i} \quad \underbrace{{}^i I_{i,xx} \quad {}^i I_{i,xy} \quad {}^i I_{i,xz} \quad {}^i I_{i,yy} \quad {}^i I_{i,yz} \quad {}^i I_{i,zz}}_{\text{αδράνεια συνδέσμου } i}\big]^{\mathsf{T}}$$

Γραμμικότητα ως προς τις δυναμικές παραμέτρους

- Οι εξισώσεις E-L περιέχουν την τέλεση μόνο γραμμικών πράξεων επί των T και U, η δυναμική του ρομπότ είναι γραμμική ως προς τις παραμέτρους $\pi \in \mathbb{R}^{10n}$

$$\pi^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} \pi_1^{\mathsf{T}} & \pi_1^{\mathsf{T}} & \cdots & \pi_n^{\mathsf{T}} \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$$

$$\boxed{M(q)\ddot{q} + c(q,\dot{q}) + g(q) = \underbrace{Y_\pi(q,\dot{q},\ddot{q})}_{n \times 10n}\pi = u}$$

μπλοκ-διαγώνιος (για ανοιχτές κινηματικές αλυσίδες)
regression matrix

- Κάποιες από τις $10n$ παραμέτρους είναι δυνατόν να μην εμφανίζονται στο δυναμικό μοντέλο δεδομένου βραχίονα $\Longrightarrow$ αντίστοιχες στήλες του Y_π είναι 0

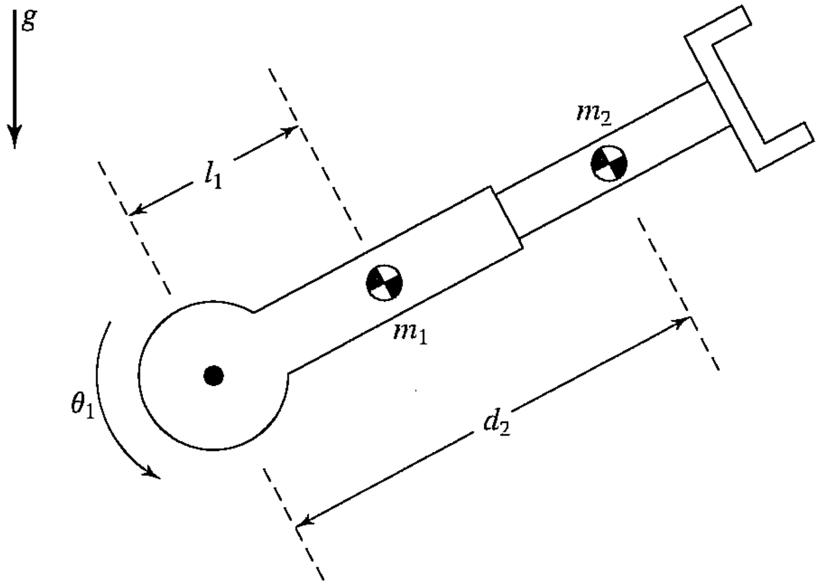
- Κάποιες από τις $10n$ παραμέτρους μπορεί να εμφανίζονται σε συγκεκριμένους συνδυασμούς με άλλες παραμέτρους $\Longrightarrow$ αντίστοιχες στήλες του Y_π είναι γραμμικά εξαρτημένες

- Αν περιληφθούν (i) ο επενεργητής του συνδέσμου, (ii) η τριβή Coulomb και (iii) η ιξώδης τριβή $\Longrightarrow$ προστίθενται 3 παράμετροι ανά σύνδεσμο

Γραμμικότητα ως προς τις δυναμικές παραμέτρους

- Μπορούν να βρεθούν $p << 10n$ ομάδες παραμέτρων (σχετικές με τις p ανεξάρτητες στήλες του πίνακα Y_π) που ορίζουν τους δυναμικούς συντελεστές του ρομπότ $\Longrightarrow$ ελάχιστη παραμετρικοποίηση του ρομπότ
- Αυτό μπορεί να γίνει με θεώρηση των δυναμικών εξισώσεων ή (καλύτερα) και με συστηματικό τρόπο.

Βραχίονας RP



$$(m_1 l_1^2 + I_{zz,1} + I_{zz,2} + m_2 d_2^2)\ddot{\theta}_1 + 2m_2 d_2 \dot{\theta}_1 \dot{d}_2 + (m_1 l_1 + m_2 d_2) g \cos\theta_1 = u_1$$

$$m_2 \ddot{d}_2 - m_2 d_2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 g \sin\theta_1 = u_2$$

$$\ddot{\theta}_1 (m_1 l_1^2 + I_{zz,1} + I_{zz,2}) + g\cos\theta_1 (m_1 l_1) + (d_2^2 \ddot{\theta}_1 + 2d_2 \dot{\theta}_1 \dot{d}_2 + d_2 g \cos\theta_1) m_2 = u_1$$

$$(\ddot{d}_2 - d_2 \dot{\theta}_1^2 + g \sin\theta_1) m_2 = u_2$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 & g\cos\theta_1 & d_2^2\ddot{\theta}_1 + 2d_2\dot{\theta}_1\dot{d}_2 + d_2 g\cos\theta_1 \\ 0 & 0 & \ddot{d}_2 - d_2\dot{\theta}_1^2 + g\sin\theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 l_1^2 + I_{zz,1} + I_{zz,2} \\ m_1 l_1 \\ m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Αναγνώριση δυναμικών παραμέτρων

- Ο ορισμός ελάχιστων δυναμικών παραμέτρων χρησιμοποιείται στην πειραματική **«ταυτοποίηση»** (εύρεση των αριθμητικών τιμών) των δυναμικών συντελεστών του ρομπότ
  - Οι κατασκευαστές παρέχουν μόνο κάποιες κύριες δυναμικές παραμέτρους π.χ. μάζες συνδέσμων
  - Εκτιμήσεις των παραμέτρων μπορεί να γίνουν μέσω εργαλείων CAD με απλουστευτικές παραδοχές (π.χ. ομοιόμορφα κατανεμημένη μάζα)

- Αν το ΤΣΔ του ρομπότ μεταφέρει κάποιο φορτίο
  - μεταβάλλονται οι 10 παράμετροι του τελευταίου συνδέσμου…
  - … και όλες (σχεδόν) οι δυναμικές παράμετροι του ρομπότ!

- Απαιτούνται πειράματα ταυτοποίησης
  - Το ρομπότ πρέπει να είναι σε κίνηση για τη διέγερση των δυναμικών χαρακτηριστικών του (όχι μόνο των στατικών/γεωμετρικών)
  - Μόνο οι δυναμικοί συντελεστές (ελάχιστο σύνολο δυναμικών παραμέτρων) μπορούν να ταυτοποιηθούν (και όχι όλες οι παράμετροι για κάθε σύνδεσμο)

Διαδικασία αναγνώριση

1. Επιλέξτε μια τροχιά $q_d(t)$ που να διεγείρει τη δυναμική του ρομπότ, δηλ.
   - Εξερευνά ικανοποιητικά τον χώρο εργασίας και εμπλέκει όλες τις συνιστώσες του δυναμικού μοντέλου.
   - Είναι περιοδική με πολλές συνιστώσες στο πεδίο της συχνότητας
2. Εκτελέστε την τροχιά χρησιμοποιώντας κατάλληλο νόμο ελέγχου
   - Συνήθως χρησιμοποιείται έλεγχος PD επειδή δεν απαιτεί γνώση του μοντέλου
3. Μετρήστε το q σε n_c χρονικές στιγμές με χρήση encoders
   - Οι ταχύτητες και οι επιταχύνσεις των αρθρώσεων μπορούν να εκτιμηθούν offline με χρήση κατάλληλων φίλτρων και αριθμητικών μεθόδων
4. Υπολογίστε τον πίνακα Y και χρησιμοποιείστε τις αντίστοιχες τιμές των εισόδων στην εξίσωση

$$Y\left(q(t_k), \dot{q}(t_k), \ddot{q}(t_k)\right) \underset{\uparrow}{a} = u(t_k) \quad k = 1, \ldots, n_C$$

ελάχιστος αριθμός παραμέτρων

Ταυτοποίηση ελαχίστων τετραγώνων

- Ορίζουμε το αλγεβρικό σύστημα γραμμικών εξισώσεων

$$\underbrace{\begin{bmatrix} Y\left(q(t_1),\dot{q}(t_1),\ddot{q}(t_1)\right) \\ Y\left(q(t_2),\dot{q}(t_2),\ddot{q}(t_2)\right) \\ \vdots \\ Y\left(q(t_{n_c}),\dot{q}(t_{n_c}),\ddot{q}(t_{n_C})\right) \end{bmatrix}}_{(n_C\cdot n)\times p} a = \begin{bmatrix} u(t_1) \\ u(t_2) \\ \vdots \\ u(t_{n_C}) \end{bmatrix} \Leftrightarrow \boxed{\bar{Y}a=\bar{u}}$$

- Ικανοποιητικά διεγείρουσες τροχιές + αρκετά μεγάλος αριθμός σημείων κατά τη δειγματοληψία της εκτέλεσης της τροχιάς ώστε $n_C\cdot n >> p$ + κατάλληλη επιλογή των σημείων του δείγματος ⇒ $\mathrm{rank}\ \bar{Y}=p$

- Λύση συστήματος μέσω του ψευδοαντίστροφου

$$\boxed{a=\bar{Y}^{\#}\bar{u}=\left(\bar{Y}^{\top}\bar{Y}\right)^{-1}\bar{Y}^{\top}\bar{u}}$$