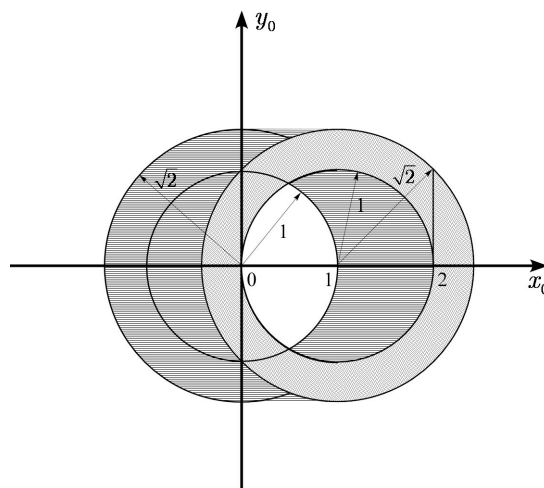


Ομάδα Ασκήσεων #3-Λύσεις

Πρόβλημα #1

- (α) Ο βραχίονας είναι επίπεδος. Μπορούμε να βρούμε τον προσπελάσιμο χώρο εργασίας με μια βήμα-προς-βήμα προσέγγιση. Πρώτα βρίσκουμε το χώρο που καλύπτεται όταν η άρθρωση-3 μεταβάλλεται από $0 \rightarrow 1$. Μετά σχεδιάζουμε την περιοχή που σαρώνεται καθώς η άρθρωση-2 "κινείται" από $0^\circ \rightarrow 360^\circ$. Τέλος βρίσκουμε την περιοχή που καλύπτεται καθώς η άρθρωση-1 μεταβάλλεται από $0 \rightarrow 1$. Το αποτέλεσμα φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 3-1. Προσπελάσιμος χώρος εργασίας για το βραχίονα του προβλήματος #1

Ο βραχίονας έχει 3 Β.Ε., ενώ ο χώρος εργασίας έχει διάσταση 2. Επομένως ο "επιδέξιος" χώρος εργασίας είναι μονοδιάστατος. Ο βραχίονας μπορεί να φτάσει σ' ένα δεδομένο σημείο (του προσπελάσιμου χώρου εργασίας) με περισσότερους από έναν προσανατολισμούς.

- (β) Από το σχήμα:

$$\begin{aligned}x_E &= d_1 + l_2 c_2 + d_3 c(\theta_2 + 90^\circ) = d_1 + l_2 c_2 - d_3 s_2 \\y_E &= l_2 s_2 + d_3 s(\theta_2 + 90^\circ) = l_2 s_2 + d_3 c_2 \\\theta_E &= \theta_2 + 90^\circ\end{aligned}\tag{3.1}$$

- (γ) Αλγεβρικά, από την (3.1), προκύπτουν οι αντίστροφες κινηματικές εξισώσεις:

$$\begin{aligned}\theta_2 &= \theta_E - 90^\circ \\d_3 &= (y_E - l_2 s_2) / c_2 \\d_1 &= x_E - l_2 c_2 + d_3 s_2\end{aligned}\tag{3.2}$$

Η λύση υπάρχει αν και μόνο αν

$$c_2 \neq 0 \Leftrightarrow \theta_2 \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\tag{3.3}$$

Στις περιπτώσεις όπου

$$\theta_2 = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

οι σύνδεσμοι 1,3 γίνονται παράλληλοι και μπορεί να προσδιοριστεί μόνο το άθροισμα ή η διαφορά των μεταβλητών των αντίστοιχων πρισματικών αρθρώσεων, δηλαδή $d_1 + d_3$ ή $d_1 - d_3$. Δεν υπάρχει μοναδική λύση για τις d_1, d_3 .

(δ) Από διαφορίση των κινηματικών εξισώσεων (3.1), προκύπτει:

$$\begin{aligned}\dot{x}_E &= \dot{d}_1 - l_2 s_2 \dot{\theta}_2 - d_3 c_2 \dot{\theta}_2 - s_2 \dot{d}_3 \\ \dot{y}_E &= (l_2 c_2 - d_3 s_2) \dot{\theta}_2 + c_2 \dot{d}_3 \\ \dot{\theta}_E &= \dot{\theta}_2\end{aligned}\quad (3.4)$$

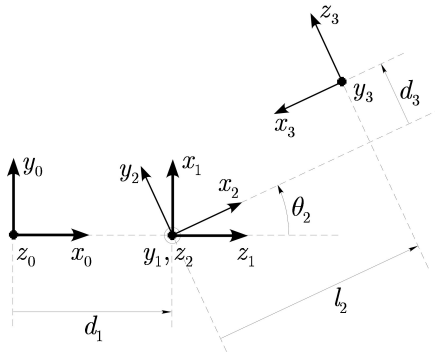
ή

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_E \\ \dot{y}_E \\ \dot{\theta}_E \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -l_2 s_2 - d_3 c_2 & -s_2 \\ 0 & l_2 c_2 - d_3 s_2 & c_2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{{}^0\mathbf{J}_V} \begin{bmatrix} \dot{d}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{d}_3 \end{bmatrix}\quad (3.5)$$

(ε) Η Ιακωβιανή, χρησιμοποιώντας τη γενική μέθοδο, για την περίπτωση του PRP βραχίονα, είναι:

$${}^0\mathbf{J}_V = \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{z}_1 & ({}^0\mathbf{z}_2)^\times {}^0\mathbf{p}_E^2 & {}^0\mathbf{z}_3 \\ 0 & {}^0\mathbf{z}_2 & 0 \end{bmatrix}\quad (3.6)$$

Δεδομένου ότι ο βραχίονας είναι επίπεδος, χρειαζόμαστε το τμήμα της ${}^0\mathbf{J}_L$ που αφορά τις (x,y) συνιστώσες της ταχύτητας του άκρου (δύο πρώτες γραμμές του ${}^0\mathbf{J}_V(6 \times 6)$) και το τμήμα του ${}^0\mathbf{J}_A$ που αφορά την z-συνιστώσα της γωνιακής ταχύτητας του άκρου ((έκτη γραμμή του ${}^0\mathbf{J}_V(6 \times 6)$)).



Σχήμα 3-2. ΣΣ για το βραχίονα του προβλήματος #1

Είναι

$${}^0\mathbf{z}_1 = [1 \ 0 \ 0]^T, \quad {}^0\mathbf{z}_2 = [0 \ 0 \ 1]^T$$

$${}^0\mathbf{z}_3 = {}^0\mathbf{R}_2 {}^2\mathbf{z}_3 = \mathbf{R}_z(\theta_2) {}^2\mathbf{z}_3 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s_2 \\ c_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^0\mathbf{p}_E^2 = {}^0\mathbf{p}_E - {}^0\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} x_E \\ y_E \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} d_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_2 c_2 - d_3 s_2 \\ l_2 s_2 + d_3 c_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left({}^0\mathbf{z}_2\right)^\times {}^0\mathbf{p}_E^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} {}^0\mathbf{p}_E^2 = \begin{bmatrix} -l_2 s_2 - d_3 c_2 \\ l_2 c_2 - d_3 s_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Οπότε τελικά, έχουμε:

$${}^0\mathbf{J}_V = \begin{bmatrix} 1 & -l_2 s_2 - d_3 c_2 & -s_2 \\ 0 & l_2 c_2 - d_3 s_2 & c_2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

- (στ) Χρησιμοποιείται η μέθοδος διάδοσης της ταχύτητας. Το πλεονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι ότι οι ενδιαμέσες ταχύτητες δε χρειάζεται να εκφραστούν στο Σύστημα Συντεταγμένων (ΣΣ) της βάσης, πράγμα που μειώνει τον αριθμό των πράξεων (χρήσιμη για προγράμματα Η/Υ).

Διάδοση γραμμικής ταχύτητας (γενικά):

$${}^{i+1}\mathbf{v}_{i+1} = \begin{cases} {}^{i+1}\mathbf{R}_i \left({}^i\mathbf{v}_i + \left({}^i\boldsymbol{\omega}_i \right)^\times {}^i\mathbf{p}_{i+1}^i \right), & (\text{Re volute}) \\ {}^{i+1}\mathbf{R}_i \left({}^i\mathbf{v}_i + \left({}^i\boldsymbol{\omega}_i \right)^\times {}^i\mathbf{p}_{i+1}^i \right) + {}^{i+1}\mathbf{z}_{i+1} \dot{d}_{i+1}, & (\text{Prismatic}) \end{cases} \quad (3.8)$$

Για την ${}^0\mathbf{J}_L$, έχουμε:

P (άρθρωση-1):

$${}^1\mathbf{v}_1 = {}^0\mathbf{R}_1^T \left(\underbrace{{}^0\mathbf{v}_0}_0 + \left(\underbrace{{}^0\boldsymbol{\omega}_0}_0 \right)^\times {}^0\mathbf{p}_1^0 \right) + {}^1\mathbf{z}_1 \dot{d}_1 = [0 \ 0 \ 1]^T \dot{d}_1 = [0 \ 0 \ \dot{d}_1]^T \quad (3.9)$$

R (άρθρωση-2):

$${}^2\mathbf{v}_2 = {}^1\mathbf{R}_2^T \left({}^1\mathbf{v}_1 + \left(\underbrace{{}^1\boldsymbol{\omega}_1}_0 \right)^\times {}^1\mathbf{p}_2^1 \right) = \begin{bmatrix} s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ c_2 & -s_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{d}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_2 \dot{d}_1 \\ -s_2 \dot{d}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

P (άρθρωση-3):

$$\begin{aligned}
{}^3\mathbf{v}_3 &= {}^2\mathbf{R}_3^T \left({}^2\mathbf{v}_2 + \begin{pmatrix} \underbrace{{}^2\boldsymbol{\omega}_2}_{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}} \end{pmatrix}^\times {}^2\mathbf{p}_3 \right) + {}^3\mathbf{z}_3 \dot{d}_3 = \\
&= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T \left(\begin{bmatrix} c_2 \dot{d}_1 \\ -s_2 \dot{d}_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta}_2 & 0 \\ \dot{\theta}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_2 \\ d_3 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{d}_3 \end{bmatrix} = \\
&= [-c_2 \dot{d}_1 + d_3 \dot{\theta}_2 \quad 0 \quad -s_2 \dot{d}_1 + l_2 \dot{\theta}_2 + \dot{d}_3]^T
\end{aligned} \tag{3.11}$$

$${}^E\mathbf{v}_E = {}^3\mathbf{v}_3 \tag{3.12}$$

Αυτό είναι αρκετό για να προσδιορίσουμε την ${}^E\mathbf{J}_L$.

Εδώ θέλουμε να εκφράσουμε την Ιακωβιανή στο ΣΣ της βάσης, για να συγκρίνουμε το αποτέλεσμα μ'αυτό των βημάτων (δ), (ε).

$$\begin{aligned}
{}^0\mathbf{v}_E &\equiv \begin{bmatrix} \dot{x}_E \\ \dot{y}_E \\ \dot{z}_E \end{bmatrix} = {}^0\mathbf{R}_E {}^E\mathbf{v}_E = {}^0\mathbf{R}_2 {}^2\mathbf{R}_3 {}^3\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} {}^3\mathbf{v}_3 = \\
&= \begin{bmatrix} \dot{d}_1 - (d_3 c_2 + l_2 s_2) \dot{\theta}_2 - s_2 \dot{d}_3 \\ (-d_3 s_2 + l_2 c_2) \dot{\theta}_2 + c_2 \dot{d}_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -l_2 s_2 - d_3 c_2 & -s_2 \\ 0 & l_2 c_2 - d_3 s_2 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{d}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{d}_3 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.13}$$

(Κρατούμε τις δύο πρώτες γραμμές).

Διάδοση γωνιακής ταχύτητας (γενικά):

$${}^{i+1}\boldsymbol{\omega}_{i+1} = \begin{cases} {}^{i+1}\mathbf{z}_{i+1} \dot{\theta}_{i+1} + {}^{i+1}\mathbf{R}_i {}^i\boldsymbol{\omega}_i, & (\text{Re volute}) \\ {}^{i+1}\mathbf{R}_i {}^i\boldsymbol{\omega}_i, & (\text{Pr ismatic}) \end{cases} \tag{3.14}$$

Για την ${}^0\mathbf{J}_A$, έχουμε:

Υποθέτουμε ότι η βάση είναι ακίνητη, δηλαδή

$${}^0\boldsymbol{\omega}_0 = {}^0\mathbf{v}_0 = \mathbf{0} \tag{3.15}$$

οπότε έχουμε διαδοχικά

P (άρθρωση-1):

$${}^1\boldsymbol{\omega}_1 = {}^1\mathbf{R}_0 {}^0\boldsymbol{\omega}_0 = \mathbf{0} \tag{3.16}$$

R (άρθρωση-2):

$${}^2\omega_2 = [0 \quad 0 \quad \dot{\theta}_2]^T \quad (3.17)$$

P (άρθρωση-3):

$${}^3\omega_3 = {}^3\mathbf{R}_2 [0 \quad 0 \quad \dot{\theta}_2]^T = [0 \quad \dot{\theta}_2 \quad 0]^T \quad (3.18)$$

$${}^E\omega_E = {}^3\omega_3 \quad (3.19)$$

Και για το ΣΣ βάσης, έχουμε:

$${}^0\omega_E = {}^0\mathbf{R}_E {}^E\omega_E = {}^0\mathbf{R}_2 {}^2\mathbf{R}_3 {}^3\omega_3 = [0 \quad 0 \quad \dot{\theta}_2]^T \quad (3.20)$$

ή

$${}^0\omega_{E,z} = \dot{\theta}_2 = [0 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} \dot{d}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{d}_3 \end{bmatrix} = \dot{\theta}_2 \quad (3.21)$$

Επομένως η Ιακωβιανή δίνεται από την

$${}^0\mathbf{J}_V = \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{J}_L (2 \times 3) \\ {}^0\mathbf{J}_A (1 \times 3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -l_2 s_2 - d_3 c_2 & -s_2 \\ 0 & l_2 c_2 - d_3 s_2 & c_2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

- (Ζ) Η συνεισφορά της άρθρωσης-2 στη γραμμική ταχύτητα του άκρου, δίνεται από τη δεύτερη στήλη της ${}^0\mathbf{J}_L$:

$$\begin{bmatrix} {}^0\dot{x}_E \\ {}^0\dot{y}_E \end{bmatrix}_{\text{by joint-2}} = \begin{bmatrix} -l_2 s_2 - d_3 c_2 \\ l_2 c_2 - d_3 s_2 \end{bmatrix} \dot{\theta}_2 \quad (3.23)$$

- (η) Οι ιδιόμορφες θέσεις του βραχίονα προκύπτουν από την εξίσωση $\det(\mathbf{J}) = 0$

$$\det(\mathbf{J}) = 0 \Leftrightarrow -c_2 = 0 \Leftrightarrow \theta_2 = \pm \frac{\pi}{2} \quad (-\pi < \theta_2 \leq \pi) \quad (3.24)$$

Σ'αυτές τις ιδιόμορφες θέσεις, χάνεται ένας βαθμός κινητικότητας: Για κάθε συνδυασμό ταχυτήτων αρθρώσεων, οι συνιστώσες της ταχύτητας του άκρου είναι παράλληλες προς τον άξονα-x (δεν είναι δυνατόν να πετύχουμε ταχύτητα με y-συνιστώσα για το άκρο).

Πρόβλημα #2

- (α) Χρησιμοποιώντας ταχύτητες γωνιών Euler (ZYZ) για να περιγράψουμε την περιστροφική ταχύτητα του σφαιρικού (3R) καρπού, έχουμε:

$$\mathbf{i}_E = \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \dot{q}_4 \\ \dot{q}_5 \\ \dot{q}_6 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{{}^0\mathbf{J}_r} \begin{bmatrix} \dot{q}_4 \\ \dot{q}_5 \\ \dot{q}_6 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

(Β) Σύνδεση της γωνιακής ταχύτητας του άκρου, με τις ταχύτητες των (ZYZ) γωνιών Euler:

$$\begin{aligned} {}^0\boldsymbol{\omega}_E &= {}^0\mathbf{z}_0\dot{q}_4 + {}^0\mathbf{y}_1\dot{q}_5 + {}^0\mathbf{z}_2\dot{q}_6 = \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{q}_4 + \mathbf{R}_z(q_4) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{q}_5 + \mathbf{R}_z(q_4)\mathbf{R}_y(q_5) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{q}_6 = \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{q}_4 + \begin{bmatrix} -s_4 \\ c_4 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{q}_5 + \begin{bmatrix} c_4s_5 \\ s_4s_5 \\ c_5 \end{bmatrix} \dot{q}_6 = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -s_4 & c_4s_5 \\ 0 & c_4 & s_4s_5 \\ 1 & 0 & c_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_4 \\ \dot{q}_5 \\ \dot{q}_6 \end{bmatrix} = \mathbf{E}_{ZYZ} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.26)$$

Κάθε στήλη του $\mathbf{E}_{ZYZ}$ αντιπροσωπεύει τη συνεισφορά κάθε μιας από τις $(\dot{q}_4, \dot{q}_5, \dot{q}_6)$ στην ταχύτητα του άκρου ${}^0\boldsymbol{\omega}_E$.

Η Ιακωβιανή ${}^0\mathbf{J}_A$ είναι:

$${}^0\mathbf{J}_A = \mathbf{E}_{ZYZ} {}^0\mathbf{J}_r = \mathbf{E}_{ZYZ} \mathbf{I}_3 = \mathbf{E}_{ZYZ} \quad (3.27)$$

(Υ)

$$\dot{\mathbf{q}} = {}^0\mathbf{J}_A^{-1} {}^0\boldsymbol{\omega}_{E,(des)} \quad (3.28)$$

Η παραπάνω αντιστροφή είναι δυνατή, για τον ${}^0\mathbf{J}_A(3 \times 3)$, αν και μόνο αν $\det({}^0\mathbf{J}_A) \neq 0$. (Ισοδύναμα, όλες οι στήλες του ${}^0\mathbf{J}_A(3 \times 3)$, πρέπει να είναι γραμμικά ανεξάρτητες). Σ' αυτή την περίπτωση, υπάρχει μοναδική λύση για τις $(\dot{q}_4, \dot{q}_5, \dot{q}_6)$, που δίνεται από την (3.28).

Ιδιομορφίες:

$$\det({}^0\mathbf{J}_A) = 0 \Leftrightarrow -s_5 = 0 \Leftrightarrow q_5 = 0^\circ, \pm 180^\circ \quad (3.29)$$

Σ' αυτές τις θέσεις είναι $\mathbf{z}_4 \parallel \mathbf{z}_6$, οπότε δεν υπάρχει μοναδική λύση για τα $\dot{q}_4, \dot{q}_6$. Επιπλέον η γωνιακή ταχύτητα άκρου που μπορεί να επιτευχθεί, θα βρίσκεται στο

επίπεδο που ορίζεται από τους άξονες ($\mathbf{z}_4 \equiv \mathbf{z}_6, \mathbf{z}_5$). Οι ιδιομορφίες αυτές είναι "φυσικές" και "παράστασης" ($\mathbf{E}_{ZYZ}$, representational):

$${}^0\boldsymbol{\omega}_E = {}^0\mathbf{J}_A \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{E}_{ZYZ} {}^0\mathbf{J}_r \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{E}_{ZYZ} \dot{\mathbf{q}} \quad (3.30)$$

Πρόβλημα #3

(α) Εμβαδά, διατομών:

$$\begin{aligned} A_{outer} &= 0.305^2 = 0.0930 \text{ m}^2 \\ A_{inner} &= 0.286 \times 0.292 = 0.08357 \text{ m}^2 \end{aligned} \quad (3.31)$$

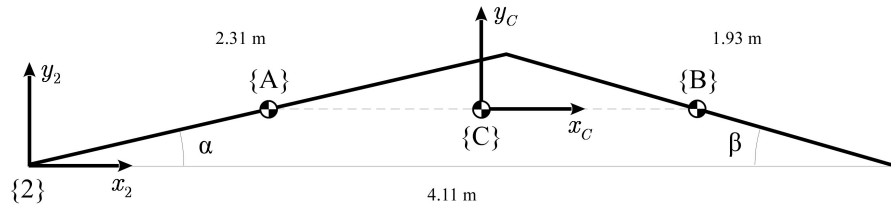
Κάτω τμήμα:

$$\begin{aligned} {}^A I_{xx_l} &= \frac{\rho l_l}{12} (A_{outer} (0.305^2 + 0.305^2) - A_{inner} (0.286^2 + 0.292^2)) = 5.01 \text{ kgm}^2 \\ {}^A I_{yy_l} &= \frac{\rho l_l}{12} (A_{outer} (2.31^2 + 0.305^2) - A_{inner} (2.31^2 + 0.292^2)) = 78.04 \text{ kgm}^2 \\ {}^A I_{zz_l} &= \frac{\rho l_l}{12} (A_{outer} (2.31^2 + 0.305^2) - A_{inner} (2.31^2 + 0.286^2)) = 78.49 \text{ kgm}^2 \\ {}^A I_{ij_l} &= 0, (i \neq j) \end{aligned} \quad (3.32)$$

Άνω τμήμα:

$$\begin{aligned} {}^A I_{xx_u} &= \frac{\rho l_u}{12} (A_{outer} (0.305^2 + 0.305^2) - A_{inner} (0.286^2 + 0.292^2)) = 4.186 \text{ kgm}^2 \\ {}^A I_{yy_u} &= \frac{\rho l_u}{12} (A_{outer} (1.93^2 + 0.305^2) - A_{inner} (1.93^2 + 0.292^2)) = 46.1 \text{ kgm}^2 \\ {}^A I_{zz_u} &= \frac{\rho l_u}{12} (A_{outer} (1.93^2 + 0.305^2) - A_{inner} (1.93^2 + 0.286^2)) = 46.47 \text{ kgm}^2 \\ {}^A I_{ij_u} &= 0, (i \neq j) \end{aligned} \quad (3.33)$$

(β)



Σχήμα 3-3. Μοντέλο των συνδέσμων και αντίστοιχα ΣΣ (πρόβλημα #3)

$$\cos(\alpha) = \frac{-1.93^2 + 2.31^2 + 4.11^2}{2(2.31 \times 4.11)} \Rightarrow \alpha = 13^\circ \quad (3.34)$$

Παρόμοια:

$$\beta = 15.6^\circ \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} {}^2\mathbf{p}_A &= \mathbf{R}_z(\alpha) \begin{bmatrix} 2.31/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1.13 & 0.26 & 0 \end{bmatrix}^T \\ {}^2\mathbf{p}_B &= \begin{bmatrix} 4.11 - \frac{1.93}{2}c\beta & \frac{1.93}{2}s\beta & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3.18 & 0.26 & 0 \end{bmatrix}^T \\ {}^2\mathbf{p}_C &= \frac{m_A {}^2\mathbf{p}_A + m_B {}^2\mathbf{p}_B}{m_A + m_B} = \frac{l_l {}^2\mathbf{p}_A + l_u {}^2\mathbf{p}_B}{l_l + l_u} = \begin{bmatrix} 2.06 & 0.26 & 0 \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (3.36)$$

(γ) Πρώτα βρίσκουμε το ${}^A\mathbf{I}_l^A$, εκφρασμένο στο $\Sigma\{C\}$:

$${}^C\mathbf{I}_l^A = {}^A\mathbf{R}_C^T {}^A\mathbf{I}_l^A \mathbf{R}_C \quad (3.37)$$

και ακολούθως μετατοπίζουμε (θεώρημα παραλλήλων αξόνων):

$${}^C\mathbf{I}_l^C = {}^C\mathbf{I}_l^A + \underbrace{m_A}_{170.38} ({}^2\mathbf{p}_{CA}^T {}^2\mathbf{p}_{CA} \mathbf{I}_3 - {}^2\mathbf{p}_{CA} {}^2\mathbf{p}_{CA}^T) = \begin{bmatrix} 8.69 & -15.98 & 0 \\ -15.98 & 223.44 & 0 \\ 0 & 0 & 227.57 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

όπου

$$\begin{aligned} {}^2\mathbf{p}_{CA} &= {}^2\mathbf{p}_A - {}^2\mathbf{p}_C = \begin{bmatrix} -0.935 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (free\ vector) \\ {}^A\mathbf{R}_C &= \mathbf{R}_z(-\alpha) = \begin{bmatrix} c\alpha & s\alpha & 0 \\ -s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.974 & 0.225 & 0 \\ -0.225 & 0.974 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.39)$$

Ανάλογα έχουμε για το άνω μέρος:

$$\begin{aligned} {}^C\mathbf{I}_u^B &= {}^B\mathbf{R}_C^T {}^B\mathbf{I}_u^B \mathbf{R}_C \\ {}^C\mathbf{I}_u^C &= {}^C\mathbf{I}_u^B + \underbrace{m_B}_{142.35} ({}^2\mathbf{p}_{CB}^T {}^2\mathbf{p}_{CB} \mathbf{I}_3 - {}^2\mathbf{p}_{CB} {}^2\mathbf{p}_{CB}^T) = \begin{bmatrix} 7.21 & 10.85 & 0 \\ 10.85 & 221.49 & 0 \\ 0 & 0 & 224.9 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.40)$$

όπου

$$\begin{aligned} {}^2\mathbf{p}_{CB} &= {}^2\mathbf{p}_B - {}^2\mathbf{p}_C = \begin{bmatrix} 1.12 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \\ {}^B\mathbf{R}_C &= \mathbf{R}_z(\beta) \end{aligned} \quad (3.41)$$

Τελικά έχουμε (αφού τα $\Sigma\{C\}$ και $\{2\}$ είναι παράλληλα):

$${}^2\mathbf{I}_{boom}^C = {}^C\mathbf{I}_{boom}^C = {}^C\mathbf{I}_l^C + {}^C\mathbf{I}_u^C = \begin{bmatrix} 15.9 & -5.13 & 0 \\ -5.13 & 444.9 & 0 \\ 0 & 0 & 452.5 \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

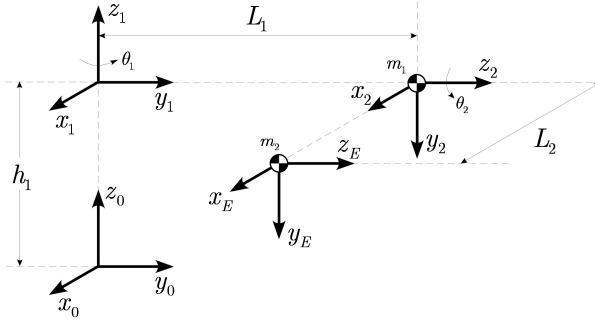
- (δ) Ναι, τα γινόμενα αδράνειας I_{xy}, I_{xz}, I_{yz} είναι αμελητέα σε σχέση με τις ροπές αδράνειας I_{yy}, I_{zz} . Επίσης η ροπή αδράνειας I_{xx} είναι αμελητέα σε σχέση με τις I_{yy}, I_{zz} .

Πρόβλημα #4

Το PUMA είναι ένα ρομπότ περιστροφικών αρθρώσεων, οπότε ως μεταβλητές άρθρωσης, θεωρούνται οι θ_1, θ_2 .

Link-(i)	a_{i-1} (twist)	a_{i-1} (length)	d_i	θ_i
1	0	0	h_1	θ_1
2	-90°	0	L_1	θ_2
E	0	L_2	0	0

- (α) Σχέδιο με τα ΣΣ, για $\theta_1 = \theta_2 = 0$



Σχήμα 3-4. ΣΣ, για την "άρθρωση" ώμου, του προβλήματος #4

- (β), (γ)

Βήμα-1

Βρίσκουμε τα

$${}^0\mathbf{p}_{C1}^1, {}^0\mathbf{p}_{C2}^2, {}^0\mathbf{p}_2^1, {}^0\mathbf{v}_{C1}^0, {}^0\mathbf{v}_{C2}^0, {}^0\dot{\mathbf{v}}_{C1}^0, {}^0\dot{\mathbf{v}}_{C2}^0, {}^0\boldsymbol{\omega}_1, {}^0\boldsymbol{\omega}_2, {}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_1, {}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_2, {}^0\mathbf{p}_{C1}^0, {}^0\mathbf{p}_{C2}^0$$

$${}^0\mathbf{p}_{C1}^1 = {}^0\mathbf{R}_1^1 \mathbf{p}_{C1}^1 = \mathbf{R}_z(\theta_1) \begin{bmatrix} 0 & L_1 & 0 \end{bmatrix}^T = L_1 \begin{bmatrix} -s_1 & c_1 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (3.43)$$

$${}^0\mathbf{p}_{C2}^2 = {}^0\mathbf{R}_2^2 \mathbf{p}_{C2}^2 = \mathbf{R}_z(\theta_1) \mathbf{R}_x(-90^\circ) \mathbf{R}_z(\theta_2) \begin{bmatrix} L_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T = L_2 \begin{bmatrix} c_1 c_2 & s_1 c_2 & -s_2 \end{bmatrix}^T \quad (3.44)$$

$${}^0\mathbf{p}_2^1 = {}^0\mathbf{p}_{C1}^1 = L_1 \begin{bmatrix} -s_1 & c_1 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (3.45)$$

$${}^0\mathbf{p}_{C1}^0 = {}^0\mathbf{p}_1^0 + {}^0\mathbf{p}_{C1}^1 = \begin{bmatrix} -L_1 s_1 & L_1 c_1 & h_1 \end{bmatrix}^T \quad (3.46)$$

$${}^0\mathbf{p}_{C2}^0 = {}^0\mathbf{p}_2^0 + {}^0\mathbf{p}_{C2}^2 = {}^0\mathbf{p}_{C1}^0 + {}^0\mathbf{p}_{C2}^2 = \begin{bmatrix} -L_1 s_1 + L_2 c_1 c_2 & L_1 c_1 + L_2 s_1 c_2 & h_1 - L_2 s_2 \end{bmatrix}^T \quad (3.47)$$

$$\mathbf{v}_{C1} = {}^0\mathbf{v}_{C1} = \frac{d}{dt} {}^0\mathbf{p}_{C1} = \begin{bmatrix} -L_1 c_1 \dot{\theta}_1 & -L_1 s_1 \dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (3.48)$$

$$\mathbf{v}_{C2} = {}^0\mathbf{v}_{C2} = \frac{d}{dt} {}^0\mathbf{p}_{C2} = \begin{bmatrix} (-L_1 c_1 - L_2 s_1 c_2) \dot{\theta}_1 - c_1 s_2 L_2 \dot{\theta}_2 \\ (-L_1 s_1 + L_2 c_1 c_2) \dot{\theta}_1 - s_1 s_2 L_2 \dot{\theta}_2 \\ -L_2 c_2 \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

$$\dot{\mathbf{v}}_{C1} = \begin{bmatrix} -L_1 c_1 \ddot{\theta}_1 + L_1 s_1 \dot{\theta}_1^2 \\ -L_1 s_1 \ddot{\theta}_1 - L_1 c_1 \dot{\theta}_1^2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

$$\dot{\mathbf{v}}_{C2} = \begin{bmatrix} (-L_1 c_1 - L_2 s_1 c_2) \ddot{\theta}_1 - L_2 c_1 s_2 \ddot{\theta}_2 + (L_1 s_1 - L_2 c_1 c_2) \dot{\theta}_1^2 - L_2 c_1 c_2 \dot{\theta}_2^2 + 2L_2 s_1 s_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ (-L_1 s_1 + L_2 c_1 c_2) \ddot{\theta}_1 - L_2 s_1 s_2 \ddot{\theta}_2 + (-L_1 c_1 - L_2 s_1 c_2) \dot{\theta}_1^2 - L_2 s_1 c_2 \dot{\theta}_2^2 - 2L_2 c_1 s_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ -L_2 c_2 \ddot{\theta}_2 + L_2 s_2 \dot{\theta}_2^2 \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

$${}^0\boldsymbol{\omega}_1 = {}^0\mathbf{z}_1 \dot{\theta}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}^T \quad (3.52)$$

$${}^0\boldsymbol{\omega}_2 = {}^0\mathbf{z}_1 \dot{\theta}_1 + {}^0\mathbf{z}_2 \dot{\theta}_2 = \begin{bmatrix} -s_1 \dot{\theta}_2 & c_1 \dot{\theta}_2 & \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}^T \quad (3.53)$$

$${}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}^T \quad (3.54)$$

$${}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_2 = \begin{bmatrix} -c_1 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - s_1 \ddot{\theta}_2 & -s_1 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + c_1 \ddot{\theta}_2 & \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}^T \quad (3.55)$$

Βήμα-2

Γράφουμε τις εξισώσεις Newton-Euler, για όλους τους συνδέσμους, ξεκινώντας από το άκρο προς τη βάση και απαλείφουμε διαδοχικά τις εσωτερικές δυνάμεις (δυνάμεις περιορισμών, που δεν παράγουν έργο).

Τα παρακάτω διανύσματα, θεωρούνται όλα εκφρασμένα στο ΣΣ της βάσης (εκτός αν φαίνεται διαφορετικά)

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -g \end{bmatrix}^T, \quad g = |\mathbf{g}| \quad (3.56)$$

Σύνδεσμος-2:

Υποθέτοντας μηδενικές δυνάμεις-ροπές στο άκρο

$$\mathbf{f}_2 = m_2(\dot{\mathbf{v}}_{C2} - \mathbf{g}) = m_2 \begin{bmatrix} \dot{v}_{c2,x} & \dot{v}_{c2,y} & \dot{v}_{c2,z} + g \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{n}_2 &= (\mathbf{p}_{C2}^2)^\times \mathbf{f}_2 + \underbrace{\mathbf{I}_2^{C2}}_0 \dot{\boldsymbol{\omega}}_2 + (\boldsymbol{\omega}_2)^\times \underbrace{\mathbf{I}_2^{C2}}_0 \boldsymbol{\omega}_2 = \\
&= L_2 \begin{bmatrix} s_2 f_{2,y} + s_1 c_2 f_{2,z} \\ -s_2 f_{2,x} - c_1 c_2 f_{2,z} \\ -s_1 c_2 f_{2,x} + c_1 c_2 f_{2,y} \end{bmatrix} \quad (3.58)
\end{aligned}$$

Σύνδεσμος-1:

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{f}_2 + m_1(\dot{\mathbf{v}}_{C1} - \mathbf{g}) \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{n}_1 &= \mathbf{n}_2 + (\mathbf{p}_{C1}^1)^\times m_1(\dot{\mathbf{v}}_{C1} - \mathbf{g}) + (\mathbf{p}_2^1)^\times \mathbf{f}_2 + \underbrace{\mathbf{I}_1^{C1}}_0 \dot{\boldsymbol{\omega}}_1 + (\boldsymbol{\omega}_1)^\times \underbrace{\mathbf{I}_1^{C1}}_0 \boldsymbol{\omega}_1 = \\
&= \begin{bmatrix} \times \\ \times \\ L_2 c_2 (-s_1 f_{2,x} + c_1 f_{2,y}) + m_1 L_1^2 \ddot{\theta}_1 - L_1 (c_1 f_{2,x} + s_1 f_{2,y}) \end{bmatrix} \quad (3.60)
\end{aligned}$$

Βήμα-3

Αντικαθιστούμε και υπολογίζουμε τις ροπές αρθρώσεων:

$$\begin{aligned}
\tau_2 &= {}^0 \mathbf{z}_2 \bullet \mathbf{n}_2 = \begin{bmatrix} -s_1 & c_1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{n}_2 = \dots \Rightarrow \\
\tau_2 &= m_2 L_2 \underbrace{(L_1 s_2 \ddot{\theta}_1 + L_2 \ddot{\theta}_2)}_{inertial} + \underbrace{L_2 s_2 c_2 \dot{\theta}_1^2}_{centrifugal} \underbrace{-gc_2}_{gravitational} \quad (3.61)
\end{aligned}$$

$$\tau_1 = \underbrace{(m_1 L_1^2 + m_2 (L_1^2 + L_2^2 c_2^2)) \ddot{\theta}_1}_{inertial} + \underbrace{m_2 L_1 L_2 s_2 \ddot{\theta}_2}_{centrifugal} + \underbrace{m_2 L_1 L_2 c_2 \dot{\theta}_2^2}_{centrifugal} - \underbrace{2m_2 L_2^2 s_2 c_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2}_{Coriolis} \quad (3.62)$$

Πρόβλημα #5

- (α) Για να βρούμε τις δυνάμεις των επενεργητών που απαιτούνται για την εφαρμογή (στο άκρο) των επιθυμητών δυνάμεων-ροπών ${}^6 \mathbf{f}_E, {}^6 \mathbf{n}_E$, πρέπει να εκφράσουμε τις τελευταίες στο ΣΣ της βάσης:

$$\begin{aligned}
{}^0 \mathbf{F} &= \begin{bmatrix} {}^0 \mathbf{R}_6 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^0 \mathbf{R}_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^6 \mathbf{f}_E \\ {}^6 \mathbf{n}_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0 \mathbf{R}_6 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^0 \mathbf{R}_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & f & 0 & 0 & n \end{bmatrix} \Rightarrow \\
{}^0 \mathbf{F} &= \begin{bmatrix} (-c_1 c_4 s_5 - s_1 c_5) f \\ (-s_1 c_4 s_5 + c_1 c_5) f \\ s_4 s_5 f \\ (-c_1 c_4 s_5 - s_1 c_5) n \\ (-s_1 c_4 s_5 + c_1 c_5) n \\ s_4 s_5 n \end{bmatrix} \quad (3.63)
\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήθηκε ο ${}^0\mathbf{R}_6$ που έχει υπολογισθεί στο Πρόβλημα #3 της Ομάδας #2.

Οι απαιτούμενες δυνάμεις επενεργητών, δίνονται από την:

$$\boldsymbol{\tau} = {}^0\mathbf{J}_V^T {}^0\mathbf{F} \quad (3.64)$$

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_1 & f_{2,a} & f_{3,a} & \tau_4 & \tau_5 & \tau_6 \end{bmatrix}^T \quad (3.65)$$

Χρησιμοποιώντας τον ${}^0\mathbf{J}_V$ που υπολογίστηκε στο Πρόβλημα #5 της Ομάδας #2, έχουμε:

$$\tau_1 = (H_2 + q_3)c_4s_5f + s_4s_5n \quad (3.66)$$

$$f_{2,a} = s_4s_5f \quad (3.67)$$

$$f_{3,a} = c_5f \quad (3.68)$$

$$\tau_4 = c_5n \quad (3.69)$$

$$\tau_5 = 0 \quad (3.70)$$

$$\tau_6 = n \quad (3.71)$$

Από τις (3.67),(3.68), φαίνεται ότι οι πρισματικές αρθρώσεις δε συμμετέχουν στη ροπή περί τον $\mathbf{z}_6$. Επίσης από τις (3.69) έως (3.71) φαίνεται ότι οι ροπές αρθρώσεων του σφαιρικού καρπού δε συμμετέχουν στην εφαρμογή δύναμης κατά τον $\mathbf{z}_6$ άξονα.

(β) Δεδομένου ότι ο ${}^0\mathbf{J}_V$ είναι τετραγωνικός (6x6), μπορούμε να γράψουμε:

$$\mathbf{F} = \mathbf{J}^{-T} \boldsymbol{\tau} \quad (3.72)$$

(όλα εκφρασμένα στο ΣΣ της βάσης).

Θέλουμε να βρούμε για ποιες θέσεις του βραχίονα, μεγιστοποιείται η δύναμη κατά μήκος του άξονα-δ, με δεδομένους τους περιορισμούς για τις δυνάμεις-ροπές των επενεργητών.

Εξετάζουμε οριακές περιπτώσεις, για να απλοποιήσουμε το πρόβλημα. Θεωρούμε επίσης $n = 0$, οπότε από τις (3.66) έως (3.68), έχουμε για την f:

$$f = \frac{\tau_1}{(H_2 + q_3)c_4s_5} \quad (3.73)$$

$$f = \frac{f_{2,a}}{s_4 s_5} \quad (3.74)$$

$$f = \frac{f_{3,a}}{c_5} \quad (3.75)$$

Περίπτωση-1

Ιδιομορφία στην άρθρωση-1, οπότε η f προκύπτει από τις αρθρώσεις 2 και 3:

$$c_4 = 0 \quad (3.76)$$

Οπότε από (3.74),(3.75) παίρνουμε

$$\begin{cases} f = \frac{30}{s_5} \\ f = \frac{15}{c_5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta_5 = \tan^{-1}(2) = 63.4^\circ \\ f = 33.6 \text{ N} \end{cases} \quad (3.77)$$

Περίπτωση-2

Ιδιομορφία στην άρθρωση-2, οπότε η f προκύπτει από τις αρθρώσεις 1 και 3:

$$s_4 = 0 \quad (3.78)$$

Οπότε από (3.73),(3.75) παίρνουμε

$$\begin{cases} f = \frac{25}{0.5s_5} \\ f = \frac{15}{c_5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta_5 = \tan^{-1}\left(\frac{50}{15}\right) = 73.3^\circ \\ f = 52.2 \text{ N} \end{cases} \quad (3.79)$$

Περίπτωση-3

Ιδιομορφία στην άρθρωση-3, οπότε η f προκύπτει από τις αρθρώσεις 1 και 2:

$$c_5 = 0 \quad (3.80)$$

Οπότε από (3.73),(3.74) παίρνουμε

$$\begin{cases} f = \frac{25}{0.5c_4} \\ f = \frac{30}{s_4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta_4 = \tan^{-1}\left(\frac{30}{50}\right) = 31^\circ \\ f = 58.3 \text{ N} \end{cases} \quad (3.81)$$

Επομένως η δύναμη f , γίνεται περίπου μέγιστη για την παραπάνω περίπτωση-3.

Για την επιθυμητή ροπή n , από τις (3.69) έως (3.71), έχουμε αντίστοιχα, (θεωρώντας $f=0$):

$$n = \frac{\tau_1}{s_4 s_5} \quad (3.82)$$

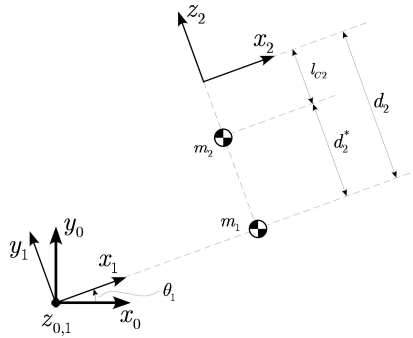
$$n = \frac{\tau_4}{c_5} \quad (3.83)$$

$$n = \tau_6 \quad (3.84)$$

Αφού είναι $|\tau_1| \leq 25 Nm$ και $|\tau_{4,6}| \leq 10 Nm$, έχουμε από τις (3.82) έως (3.84), ότι ο βραχίονας μπορεί να ασκήσει ροπή $\pm 10 Nm$ περί τον z_6 , σε κάθε θέση στο χώρο αρθρωσεων.

Πρόβλημα #6

- (α) Στην αναδρομική μέθοδο Newton-Euler, οι δυναμικές εξισώσεις κάθε συνδέσμου γράφονται στο ΣΣ του τρέχοντος συνδέσμου (κι όχι στο ΣΣ της βάσης, όπως στη αντίστοιχη μέθοδο κλειστής μορφής). Οι εσωτερικές δυνάμεις περιορισμών διαδίδονται (δεν απαλείφονται). Η μέθοδος είναι κατάλληλη για προγραμματισμό σε Η/Υ (δραστική μείωση των πράξεων). Εφαρμόζεται σε δύο φάσεις: (i) Κινηματικός υπολογισμός προς τα εμπρός, όπου οι ταχύτητες (γραμμικές και γωνιακές) και οι αντίστοιχες επιταχύνσεις υπολογίζονται διαδοχικά ξεκινώντας από τη βάση (συνήθως με μηδενικές τιμές) και προχωρώντας προς το άκρο του βραχίονα, και (ii) Δυναμικός υπολογισμός προς τα πίσω, όπου οι δυνάμεις-ροπές υπολογίζονται διαδοχικά ξεκινώντας από το άκρο (συνήθως με μηδενικές τιμές) και προχωρώντας προς τη βάση.
- (β) Έχουμε επίπεδο βραχίονα, RP. Τα ΣΣ, φαίνονται στο επόμενο σχήμα.



Σχήμα 3-5. Τα ΣΣ, για το βραχίονα RP του προβλήματος #6

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 & -g & 0 \end{bmatrix}^T, \quad g \triangleq |\mathbf{g}| \quad (3.85)$$

Για να ληφθεί υπόψη η βαρύτητα, θέτουμε

$${}^0\dot{\mathbf{v}}_0 = -\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 & g & 0 \end{bmatrix}^T \quad (3.86)$$

Θα χρειαστούν τα ${}^0\mathbf{R}_1, {}^1\mathbf{R}_2, {}^0\mathbf{p}_1^0, {}^1\mathbf{p}_2^1, {}^1\mathbf{p}_{c1}^1, {}^2\mathbf{p}_{c2}^2, {}^1\mathbf{I}_1^{C1}, {}^2\mathbf{I}_2^{C2}$.

$${}^0\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_z(\theta_1) \quad (3.87)$$

$${}^1\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.88)$$

$${}^0\mathbf{p}_1^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad {}^1\mathbf{p}_{c1}^1 = \begin{bmatrix} l_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (3.89)$$

$${}^1\mathbf{p}_2^1 = \begin{bmatrix} l_1 & d_2 & 0 \end{bmatrix}^T \quad {}^2\mathbf{p}_{c2}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -l_{c2} \end{bmatrix}^T \quad (3.90)$$

$${}^1\mathbf{I}_1^{C1} = {}^0\mathbf{R}_1^T {}^0\mathbf{I}_1^{C1} {}^0\mathbf{R}_1 = \text{diag}(0, 0, I_1) \quad (3.91)$$

$${}^2\mathbf{I}_2^{C2} = {}^0\mathbf{R}_2^T {}^0\mathbf{I}_2^{C2} {}^0\mathbf{R}_2 = \text{diag}(0, I_2, 0) \quad (3.92)$$

Βήμα-1 (Ξεκινούμε από τη βάση, υπολογισμός προς τα εμπρός):

$${}^1\boldsymbol{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}^T, \quad {}^1\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}^T \quad (3.93)$$

$${}^2\boldsymbol{\omega}_2 = {}^2\mathbf{R}_1 {}^1\boldsymbol{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad {}^2\dot{\boldsymbol{\omega}}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\ddot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (3.94)$$

$${}^1\dot{\mathbf{v}}_1 = {}^1\mathbf{R}_0 {}^0\dot{\mathbf{v}}_0 = g \begin{bmatrix} s_1 & c_1 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (3.95)$$

$$\begin{aligned} {}^2\dot{\mathbf{v}}_2 = & {}^2\mathbf{R}_1 \left\{ {}^1\dot{\mathbf{v}}_1 + \left({}^1\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 \right)^\times {}^1\mathbf{p}_2^1 + \left({}^1\boldsymbol{\omega}_1 \right)^\times \left({}^1\boldsymbol{\omega}_1 \right)^\times {}^1\mathbf{p}_2^1 \right\} + \\ & + 2 \left(\underbrace{{}^2\mathbf{R}_1 {}^1\boldsymbol{\omega}_1}_{\hat{\mathbf{z}}_2} \right)^\times {}^2\mathbf{z}_2 \dot{d}_2 + {}^2\mathbf{z}_2 \ddot{d}_2 = \begin{bmatrix} -d_2 \ddot{\theta}_1 - l_1 \dot{\theta}_1^2 - 2\dot{\theta}_1 \dot{d}_2 + g s_1 \\ 0 \\ l_1 \ddot{\theta}_1 + \ddot{d}_2 - d_2 \dot{\theta}_1^2 + g c_1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.96)$$

$$\begin{aligned} {}^1\dot{\mathbf{v}}_{c1} = & {}^1\dot{\mathbf{v}}_1 + \left({}^1\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 \right)^\times {}^1\mathbf{p}_{c1}^1 + \left({}^1\boldsymbol{\omega}_1 \right)^\times \left({}^1\boldsymbol{\omega}_1 \right)^\times {}^1\mathbf{p}_{c1}^1 = \begin{bmatrix} -l_1 \dot{\theta}_1^2 + g s_1 \\ l_1 \ddot{\theta}_1 + g c_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \\ & = {}^1\mathbf{R}_2 \left({}^2\dot{\mathbf{v}}_2 \Big|_{d_2 \rightarrow 0} \right) \end{aligned} \quad (3.97)$$

$$\begin{aligned} {}^2\dot{\mathbf{v}}_{c2} = & {}^2\dot{\mathbf{v}}_2 + \left({}^2\dot{\boldsymbol{\omega}}_2 \right)^\times {}^2\mathbf{p}_{c2}^2 + \left({}^2\boldsymbol{\omega}_2 \right)^\times \left({}^2\boldsymbol{\omega}_2 \right)^\times {}^2\mathbf{p}_{c2}^2 = \\ & = \begin{bmatrix} -(d_2 - l_{c2}) \ddot{\theta}_1 - l_1 \dot{\theta}_1^2 - 2\dot{\theta}_1 \dot{d}_2 + g s_1 \\ 0 \\ l_1 \ddot{\theta}_1 + \ddot{d}_2 - (d_2 - l_{c2}) \dot{\theta}_1^2 + g c_1 \end{bmatrix} = {}^2\dot{\mathbf{v}}_2 \Big|_{d_2 \rightarrow (d_2 - l_{c2}) \equiv d_2^*} \end{aligned} \quad (3.98)$$

Χρησιμοποιούμε τις εξισώσεις N-E για να βρούμε τη συνισταμένη δύναμη-ροπή, για κάθε σύνδεσμο:

$${}^1\mathbf{F}_1 = m_1 {}^1\dot{\mathbf{v}}_{C1}, \quad {}^2\mathbf{F}_2 = m_2 {}^2\dot{\mathbf{v}}_{C2} \quad (3.99)$$

$${}^1\mathbf{N}_1 = {}^1\mathbf{I}_1 {}^1\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I_1 \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} \quad (3.100)$$

$${}^2\mathbf{N}_2 = {}^2\mathbf{I}_2 {}^2\dot{\boldsymbol{\omega}}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -I_2 \ddot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.101)$$

Βήμα-2 (Υπολογισμός προς τα πίσω. Ξεκινούμε από το άκρο):

$${}^3\mathbf{f}_3 = {}^E\mathbf{f}_E = \mathbf{0} \Rightarrow {}^2\mathbf{f}_2 = {}^2\mathbf{F}_2 \quad (3.102)$$

Οπότε η $\mathbf{f}_{2,a}$ που ζητείται, θα είναι:

$${}^2\mathbf{f}_{2,a} = {}^2\mathbf{z}_2 \bullet {}^2\mathbf{F}_2 = m_2 l_1 \ddot{\theta}_1 + m_2 \ddot{d}_2 - m_2 d_2^* \dot{\theta}_1^2 + m_2 g c_1 \quad (3.103)$$

(γ) Μηδενίζουμε τις χρονικές παραγώγους και προσθέτουμε το μέρος που αναλογεί στην άρθρωση-2 (για τη δεδομένη δύναμη στο άκρο):

$${}^2\mathbf{f}_{2,a} = m_2 g c_1 + {}^2\mathbf{z}_2^T {}^0\mathbf{R}_2 {}^0\mathbf{F} = m_2 g c_1 - {}^0F_x s_1 + {}^0F_y c_1 \quad (3.104)$$