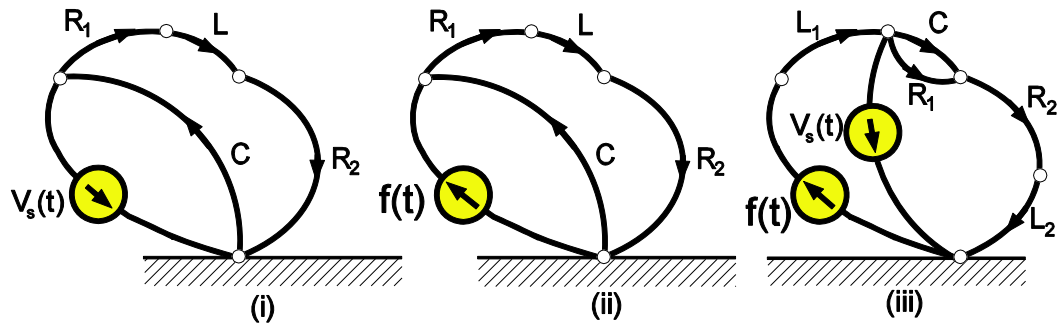


Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 1

Για καθέναν από τους παρακάτω γραμμικούς γράφους (i) – (iii):



Σχήμα 1-1. Γραμμικοί γράφοι.

(α) Να βρεθεί το κανονικό δένδρο.

(β) Να αναγνωριστούν οι πρωτεύουσες και οι δευτερεύουσες μεταβλητές.

(γ) Βρείτε την τάξη του συστήματος και αναγνωρίστε τα εξαρτημένα στοιχεία συσσώρευσης ενέργειας.

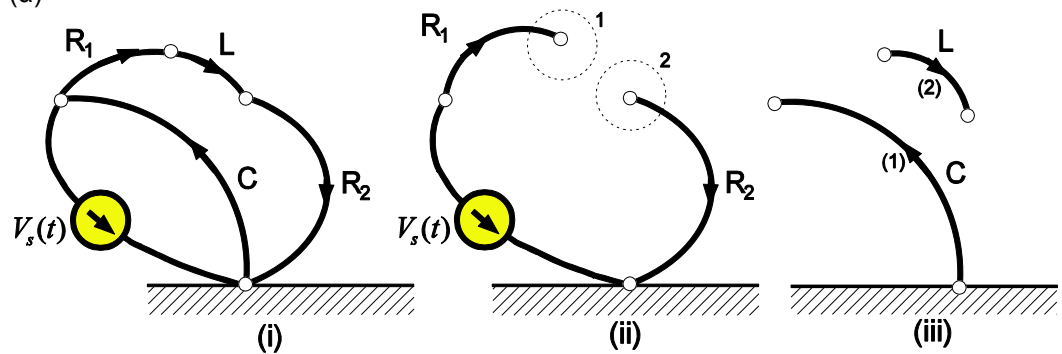
(δ) Να καταστρωθούν οι εξισώσεις κατάστασης, χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις συνέχειας και συμβατότητας που προκύπτουν από το κανονικό δένδρο. Να γραφούν σε μητρική μορφή.

Συγκρίνετε τα αποτελέσματα των περιπτώσεων (i) και (ii). Τι διαφορές παρατηρείτε; Μπορείτε να τις εξηγήσετε;

Λύση

Γραμμικός γράφος (i)

(α)



Σχήμα 1-2. (i) Γραμμικός γράφος, (ii) Κανονικό δένδρο και (iii) Δεσμοί δένδρου.

Είναι: $B=5, N=4, S=1(S_T=0, S_A=1)$

Αριθμός κλάδων κανονικού δένδρου: $N-1=3$

Αριθμός δεσμών: $B-N+1=2$

(β)

Πρωτεύουσες μεταβλητές:

- Εγκάρσιες μεταβλητές (across) στους κλάδους του κανονικού δένδρου.

- Διαμήκειες μεταβλητές (through) στους δεσμούς του δένδρου.

$$\Rightarrow V_S, V_{R_1}, V_{R_2}, f_C, f_L$$

Δευτερεύουσες μεταβλητές:

- Διαμήκειες μεταβλητές (through) στους κλάδους του κανονικού δένδρου.

- Εγκάρσιες μεταβλητές (across) στους δεσμούς του δένδρου.

$$\Rightarrow f_S, f_{R_1}, f_{R_2}, V_C, V_L$$

(γ)

Μεταβλητές Κατάστασης:

- Εγκάρσιες μεταβλητές (across) στα στοιχεία τύπου "Α" πάνω στους κλάδους του κανονικού δένδρου.

- Διαμήκειες μεταβλητές (through) στα στοιχεία τύπου "Τ" πάνω στους δεσμούς του δένδρου.

$$\Rightarrow f_L$$

Τάξη Συστήματος:

- Αριθμός στοιχείων τύπου "Α" στο κανονικό δένδρο + αριθμός στοιχείων τύπου "Τ" στους δεσμούς του δένδρου.

$$\Rightarrow 1$$

Εξαρτημένα Στοιχεία Συσσώρευσης Ενέργειας:

- Στοιχεία τύπου "Τ" στους κλάδους του κανονικού δένδρου.

- Στοιχεία τύπου "Α" στους δεσμούς του κανονικού δένδρου.

$$\Rightarrow C$$

(δ)

Εξισώσεις Στοιχείων: $\Rightarrow B-S=5-1=4$ εξισώσεις.

- Η πρωτεύουσα μεταβλητή θα πρέπει να εμφανιστεί στο αριστερό μέρος της εξίσωσης.

$$\frac{df_L}{dt} = \frac{1}{L} V_L$$

$$V_{R_1} = R_1 f_{R_1}$$

$$V_{R_2} = R_2 f_{R_2}$$

$$f_C = C \frac{dV_C}{dt}$$

Σημείωση: Η τελευταία εξίσωση στοιχείου δεν χρειάζεται, καθώς αυτή είναι η εξίσωση ενός εξαρτημένου στοιχείου συσσώρευσης ενέργειας. Θα έπαιζε ρόλο εάν για παράδειγμα χρειαζόμασταν να βρούμε συγκεκριμένες εξόδους. Δείτε τη σημείωση στο τέλος.

Εξισώσεις Συνέχειας $\Rightarrow N - 1 - S_A = 4 - 1 - 1 = 2$ εξισώσεις.

- Άθροισμα των μεταβλητών τύπου "T" που εισέρχονται ή εξέρχονται από τους κόμβους στους οποίους η περιβάλλουσα κλειστή γραμμή συναντά μόνο έναν κλάδο του κανονικού δένδρου (εκτός από πηγές τύπου "A").

- Οι δευτερεύουσες μεταβλητές γράφονται στο αριστερό μέρος.

$$\#1: f_{R_1} - f_L = 0 \Rightarrow f_{R_1} = f_L$$

$$\#2: f_L - f_{R_2} = 0 \Rightarrow f_{R_2} = f_L$$

Εξισώσεις Συμβατότητας $\Rightarrow B - N + 1 - S_T = 5 - 4 + 1 - 0 = 2$ εξισώσεις

- Άθροισμα των μεταβλητών τύπου "A" κατά μήκος ενός βρόχου που δημιουργείται αντικαθιστώντας έναν δεσμό δένδρου (εκτός από πηγές τύπου "T") στο κανονικό δένδρο.

- Οι δευτερεύουσες μεταβλητές γράφονται στο αριστερό μέρος.

$$(1): -V_C - V_S = 0 \Rightarrow V_C = -V_S$$

$$(2): V_L + V_{R_1} - V_S + V_{R_2} = 0 \Rightarrow V_L = V_S - V_{R_1} - V_{R_2}$$

Αντικαθιστούμε τις εξισώσεις συνέχειας/συμβατότητας στις εξισώσεις στοιχείων έτσι ώστε να απαλειφθούν οι δευτερεύουσες μεταβλητές:

$$\frac{df_L}{dt} = \frac{1}{L} V_L = \frac{1}{L} (V_S - V_{R_1} - V_{R_2})$$

$$V_{R_1} = R_1 f_{R_1} = R_1 f_L$$

$$V_{R_2} = R_2 f_{R_2} = R_2 f_L$$

$$f_C = -C \frac{dV_S}{dt}$$

Εξισώσεις Κατάστασης.

- Χειριζόμαστε αλγεβρικά τις εξισώσεις έτσι ώστε να μείνουν μόνο οι μεταβλητές κατάστασης.

$$\frac{d}{dt} f_L = -\frac{R_1 + R_2}{L} f_L + \frac{1}{L} V_s$$

Σημείωση: Εάν επιθυμούσαμε να υπολογίσουμε την f_C (δηλαδή η f_C είναι μια έξοδος), τότε:

$$f_C = -C \frac{dV_s}{dt} = -C \dot{V}_s$$

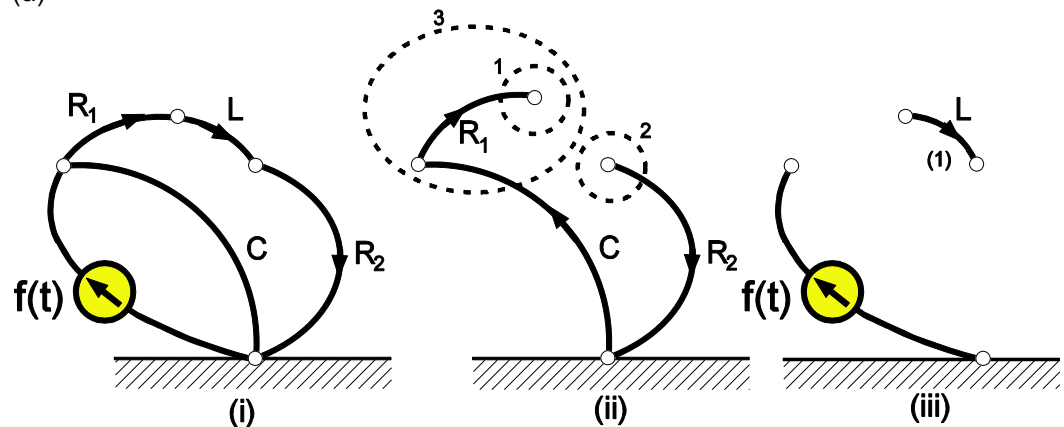
Στην περίπτωση αυτή η εξίσωση εξόδου είναι της μορφής:

$$y = c^T x + D u + E \dot{u}$$

Αυτό οφείλεται στην ύπαρξη ενός εξαρτημένου στοιχείου συσσώρευσης ενέργειας.

Γραμμικός γράφος (ii)

(α)



Σχήμα 1-3. (i) Γραμμικός γράφος, (ii) Κανονικό δένδρο και (iii) Δεσμοί δένδρου.

Είναι: $B=5, N=4, S=1 (S_T=1, S_A=0)$

Αριθμός κλάδων κανονικού δένδρου: $N-1=3$

Αριθμός δεσμών: $B-N+1=2$

(β)

Πρωτεύουσες μεταβλητές:

- Εγκάρσιες μεταβλητές (across) στους κλάδους του κανονικού δένδρου.

- Διαμήκειες μεταβλητές (through) στους δεσμούς του δένδρου.

$$\Rightarrow f_S, V_{R_1}, V_{R_2}, V_C, f_L$$

Δευτερεύουσες μεταβλητές:

- Διαμήκειες μεταβλητές (through) στους κλάδους του κανονικού δένδρου.
- Εγκάρσιες μεταβλητές (across) στους δεσμούς του δένδρου.

$$\Rightarrow V_S, f_{R_1}, f_{R_2}, f_C, V_L$$

(γ)

Μεταβλητές Κατάστασης:

- Εγκάρσιες μεταβλητές (across) στα στοιχεία τύπου "A" πάνω στους κλάδους του κανονικού δένδρου.
- Διαμήκειες μεταβλητές (through) στα στοιχεία τύπου "T" πάνω στους δεσμούς του δένδρου.

$$\Rightarrow V_C, f_L$$

Τάξη Συστήματος:

- Αριθμός στοιχείων τύπου "A" στο κανονικό δένδρο + αριθμός στοιχείων τύπου "T" στους δεσμούς του δένδρου.

$$\Rightarrow 2$$

Εξαρτημένα Στοιχεία Συσσώρευσης Ενέργειας:

- Στοιχεία τύπου "T" στους κλάδους του κανονικού δένδρου.
- Στοιχεία τύπου "A" στους δεσμούς του δένδρου.

$$\Rightarrow \text{Κανένα.}$$

(δ)

Εξισώσεις Στοιχείων: $\Rightarrow B - S = 5 - 1 = 4$ εξισώσεις.

- Η πρωτεύουσα μεταβλητή θα πρέπει να εμφανιστεί στο αριστερό μέρος της εξίσωσης.

$$\frac{df_L}{dt} = \frac{1}{L} V_L$$

$$\frac{dV_C}{dt} = \frac{1}{C} f_C$$

$$V_{R_1} = R_1 f_{R_1}$$

$$V_{R_2} = R_2 f_{R_2}$$

Εξισώσεις Συνέχειας $\Rightarrow N - 1 - S_A = 4 - 1 - 0 = 3$ εξισώσεις.

- Άθροισμα των μεταβλητών τύπου "T" που εισέρχονται ή εξέρχονται από τους κόμβους στους οποίους η περιβάλλουσα κλειστή γραμμή συναντά μόνο έναν κλάδο του κανονικού δένδρου (εκτός από πηγές τύπου "A").

- Οι δευτερεύουσες μεταβλητές γράφονται στο αριστερό μέρος.

$$\#1: f_{R_1} - f_L = 0 \Rightarrow f_{R_1} = f_L$$

$$\#2: f_L - f_{R_2} = 0 \Rightarrow f_{R_2} = f_L$$

$$\#3: f_C + f_S - f_L = 0 \Rightarrow f_C = f_L - f_S$$

Εξισώσεις Συμβατότητας $\Rightarrow B - N + 1 - S_T = 5 - 4 + 1 - 1 = 1$ εξισώσεις

- Άθροισμα των μεταβλητών τύπου "A" κατά μήκος ενός βρόχου που δημιουργείται αντικαθιστώντας έναν δεσμό δένδρου (εκτός από πηγές τύπου "T") στο κανονικό δένδρο.

- Οι δευτερεύουσες μεταβλητές γράφονται στο αριστερό μέρος.

$$(1): V_L + V_{R_2} + V_C + V_{R_1} = 0 \Rightarrow V_L = -V_C - V_{R_1} - V_{R_2}$$

Αντικαθιστούμε τις εξισώσεις συνέχειας/συμβατότητας στις εξισώσεις στοιχείων έτσι ώστε να απαλειφθούν οι δευτερεύουσες μεταβλητές:

$$\frac{df_L}{dt} = \frac{1}{L} V_L = \frac{1}{L} (-V_C - V_{R_1} - V_{R_2})$$

$$V_{R_1} = R_1 f_{R_1} = R_1 f_L$$

$$V_{R_2} = R_2 f_{R_2} = R_2 f_L$$

$$\frac{dV_C}{dt} = \frac{1}{C} f_C = \frac{1}{C} (f_L - f_S) \quad (A)$$

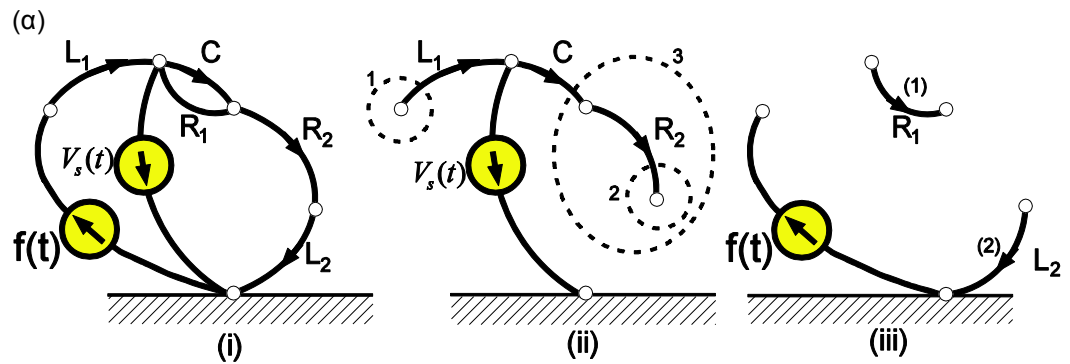
Εξισώσεις Κατάστασης.

- Χειριζόμαστε αλγεβρικά τις εξισώσεις έτσι ώστε να μείνουν μόνο οι μεταβλητές κατάστασης.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} f_L \\ V_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1 + R_2}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_L \\ V_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{C} \end{bmatrix} f_S \quad (B)$$

Σημείωση: Η μόνη διαφορά στους γραμμικούς γράφους των περιπτώσεων (i) και (ii) είναι ότι η πηγή τύπου "A" της περίπτωσης (i) έχει αντικατασταθεί από την πηγή τύπου "T" της περίπτωσης (ii). Παρόλα αυτά, η πηγή τύπου "A" στην περίπτωση (i) δημιουργεί ένα εξαρτώμενο στοιχείο συσσώρευσης ενέργειας (C), και έτσι ελαττώνει την τάξη του συστήματος σε 1, ενώ στην περίπτωση (ii) η τάξη του συστήματος είναι 2 γιατί δεν υπάρχει κανένα εξαρτημένο στοιχείο συσσώρευσης ενέργειας.

Γραμμικός γράφος (iii)



Σχήμα 1-4. (i) Γραμμικός γράφος, (ii) Κανονικό δένδρο και (iii) Δεσμοί.

Είναι: $B=7, N=5, S=2 (S_T=1, S_A=1)$

Αριθμός κλάδων κανονικού δένδρου: $N-1=4$

Αριθμός δεσμών: $B-N+1=3$

(β)

Πρωτεύουσες μεταβλητές:

- Εγκάρσιες μεταβλητές (across) στους κλάδους του κανονικού δένδρου.

- Διαμήκειες μεταβλητές (through) στους δεσμούς του δένδρου.

$$\Rightarrow V_{L_1}, V_1, V_C, V_{R_2}, f_2, f_{R_1}, f_{L_2}$$

Δευτερεύουσες μεταβλητές:

- Διαμήκειες μεταβλητές (through) στους κλάδους του κανονικού δένδρου.

- Εγκάρσιες μεταβλητές (across) στους δεσμούς του δένδρου.

$$\Rightarrow f_{L_1}, f_1, f_C, f_{R_2}, V_2, V_{R_1}, V_{L_2}$$

(γ)

Μεταβλητές Κατάστασης:

- Εγκάρσιες μεταβλητές (across) στα στοιχεία τύπου "A" πάνω στους κλάδους του κανονικού δένδρου.

- Διαμήκειες μεταβλητές (through) στα στοιχεία τύπου "T" πάνω στους δεσμούς του δένδρου.

$$\Rightarrow V_C, f_{L_2}$$

Τάξη Συστήματος:

- Αριθμός στοιχείων τύπου “Α” στο κανονικό δένδρο + αριθμός στοιχείων τύπου “Τ” στους δεσμούς του δένδρου.

$\Rightarrow 2$

Εξαρτημένα Στοιχεία Συσσώρευσης Ενέργειας:

- Στοιχεία τύπου “Τ” στους κλάδους του κανονικού δένδρου.

- Στοιχεία τύπου “Α” στους δεσμούς του δένδρου.

$\Rightarrow L_1$

(δ)

Εξισώσεις Στοιχείων: $\Rightarrow B - S = 7 - 2 = 5$ εξισώσεις.

- Εδώ, η πρωτεύουσα μεταβλητή θα πρέπει να εμφανιστεί στο αριστερό μέρος της εξίσωσης.

$$\frac{df_{L_2}}{dt} = \frac{1}{L_2} V_{L_2}$$

$$\frac{dV_C}{dt} = \frac{1}{C} f_C$$

$$V_{R_1} = R_1 f_{R_1}$$

$$V_{R_2} = R_2 f_{R_2}$$

$$V_{L_1} = L \frac{df_{L_1}}{dt}$$

Σημείωση: Η τελευταία εξίσωση στοιχείου δεν χρειάζεται, καθώς αυτή είναι η εξίσωση ενός εξαρτημένου στοιχείου συσσώρευσης ενέργειας. Θα έπαιξε ρόλο εάν για παράδειγμα χρειαζόμασταν να βρούμε συγκεκριμένες εξόδους.

Εξισώσεις Συνέχειας $\Rightarrow N - 1 - S_A = 5 - 1 - 1 = 3$ εξισώσεις.

- Άθροισμα των μεταβλητών διαμήκους τύπου που εισέρχονται ή εξέρχονται από τους κόμβους στους οποίους η περιβάλλουσα κλειστή γραμμή συναντά μόνο έναν κλάδο του κανονικού δένδρου (εκτός από πηγές τύπου “Α”).

- Οι δευτερεύουσες μεταβλητές γράφονται στο αριστερό μέρος.

$$\# 1: f_2 - f_{L_1} = 0 \Rightarrow f_{L_1} = f_2$$

$$\# 2: f_{R_2} - f_{L_2} = 0 \Rightarrow f_{R_2} = f_{L_2}$$

$$\# 3: f_C + f_{R_1} - f_{L_2} = 0 \Rightarrow f_C = f_{L_2} - f_{R_1}$$

Εξισώσεις Συμβατότητας $\Rightarrow B - N + 1 - S_T = 7 - 5 + 1 - 1 = 2$ εξισώσεις

- Άθροισμα των μεταβλητών τύπου “Α” κατά μήκος ενός βρόχου που δημιουργείται αντικαθιστώντας έναν δεσμό δένδρου (εκτός από πηγές «Τ») στο κανονικό δένδρο.

- Οι δευτερεύουσες μεταβλητές γράφονται στο αριστερό μέρος.

$$(1): V_C - V_{R_1} = 0 \Rightarrow V_{R_1} = V_C$$

$$(1): V_{L_2} - V_1 + V_C + V_{R_2} = 0 \Rightarrow V_{L_2} = V_1 - V_C - V_{R_2}$$

Αντικαθιστούμε τις εξισώσεις συνέχειας/συμβατότητας στις εξισώσεις στοιχείων έτσι ώστε να απαλειφθούν οι δευτερεύουσες μεταβλητές:

$$V_{L_1} = L_1 \frac{df_{L_1}}{dt}$$

$$\frac{dV_C}{dt} = \frac{1}{C} f_C = \frac{1}{C} (f_{L_2} - f_{R_1})$$

$$V_{R_2} = R_2 f_{R_2} = R_2 f_{L_2}$$

$$f_{R_1} = \frac{1}{R_1} V_{R_1} = \frac{1}{R_1} V_C$$

$$\frac{df_{L_2}}{dt} = \frac{1}{L_2} V_{L_2} = \frac{1}{L_2} (V_1 - V_C - V_{R_2})$$

Εξισώσεις Κατάστασης

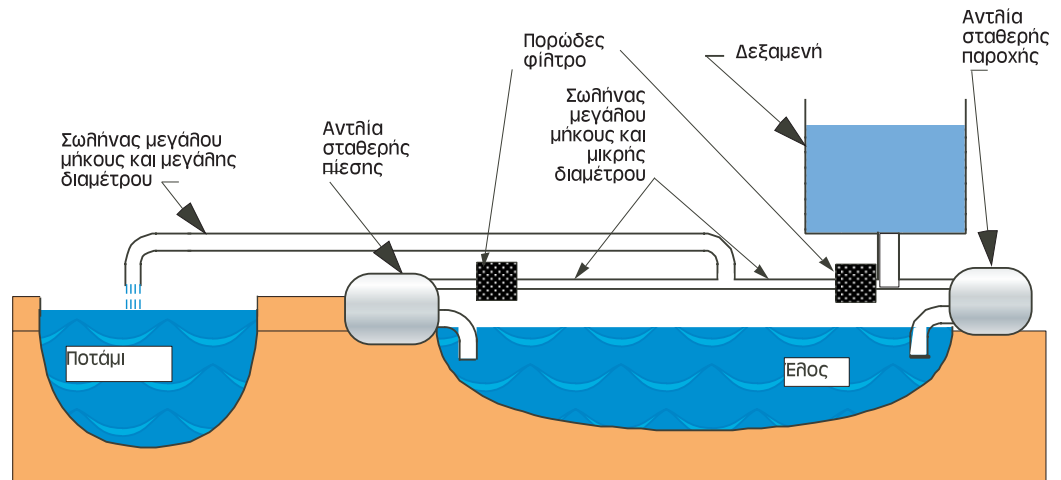
- Χειριζόμαστε αλγεβρικά τις εξισώσεις έτσι ώστε να μείνουν μόνο οι μεταβλητές κατάστασης.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} f_{L_2} \\ V_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_2}{L_2} & -\frac{1}{L_2} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{R_1 C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{L_2} \\ V_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

Σημείωση: Επειδή το L_1 είναι ένα εξαρτημένο στοιχείο συσσώρευσης ενέργειας, η πηγή f_2 δεν επηρεάζει το σύστημα. Παρόλα αυτά, εάν θέλαμε να γνωρίζουμε την V_{L_1} , θα πρέπει να συμπεριλάβουμε τη χρονική παράγωγο της πηγής f_2 , όπως σχολιάστηκε στην περίπτωση (i).

Άσκηση 2

Για το αποχετευτικό σύστημα του Σχ. 2-1:



Σχήμα 2-1. Αποχετευτικό σύστημα.

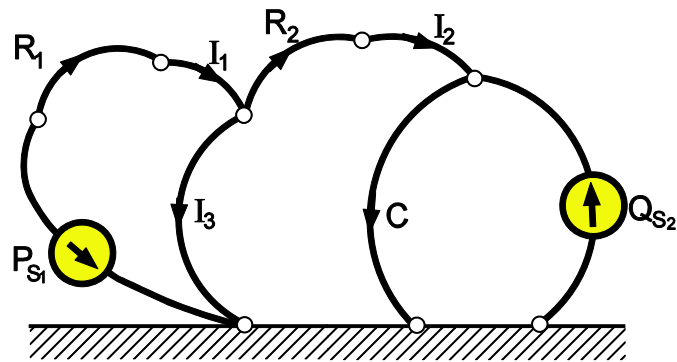
- (α) Να αναπτυχθεί ένα μοντέλο συγκεντρωμένων παραμέτρων αναφέροντας όλες τις παραδοχές.
- (β) Να σχεδιασθεί ο γραμμικός γράφος που αντιστοιχεί σε αυτό το μοντέλο.
- (γ) Να βρεθεί το κανονικό δένδρο και να αναγνωριστούν οι πρωτεύουσες και οι δευτερεύουσες μεταβλητές.
- (δ) Βρείτε την τάξη του συστήματος και αναγνωρίστε τα τυχόν εξαρτημένα στοιχεία συσσώρευσης ενέργειας.
- (ε) Να καταστρωθούν οι εξισώσεις κατάστασης και να γραφούν σε μητρωϊκή μορφή.

Λύση

(α) Κάνουμε τις παρακάτω παραδοχές:

- Ιδανικά στοιχεία είναι επαρκή.
- Μακρείς σωλήνες έχουν αδράνεια (inertance).
- Λεπτοί σωλήνες έχουν αντίσταση (resistance).
- Σε σωλήνες μεγάλης διαμέτρου, η αντίσταση μπορεί να αμεληθεί.
- Τα φίλτρα μπορούν να μοντελοποιηθούν ως μια αντίσταση.
- Αντλίες σταθερής πίεσης = Πηγές πίεσης.
- Αντλίες σταθερής παροχής = Πηγές ροής.
- Η δεξαμενή αντιστοιχεί σε υδραυλική χωρητικότητα (capacitance).

(β) Ο γραμμικός γράφος είναι:



Σχήμα 2-2. Γραμμικός γράφος.

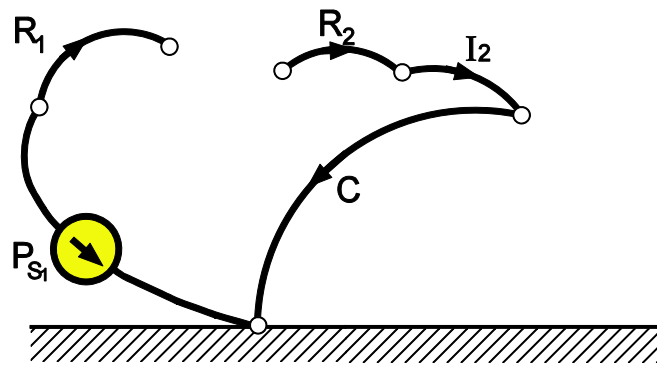
Η R_1 είναι η ισοδύναμη αντίσταση του αριστερού φίλτρου και του αριστερού αγωγού μικρής διαμέτρου.

I_1 είναι η αδράνεια του αριστερού αγωγού μικρής διατομής.

Παρόμοια ορίζονται και τα R_2, I_2 . Ο μακρύς και μεγάλης διαμέτρου αγωγός μοντελοποιείται ως μια καθαρή αδράνεια.

Σημείωση: Όλες οι πιέσεις είναι σχετικές (gage) πιέσεις: πιέσεις πάνω από την ατμοσφαιρική.

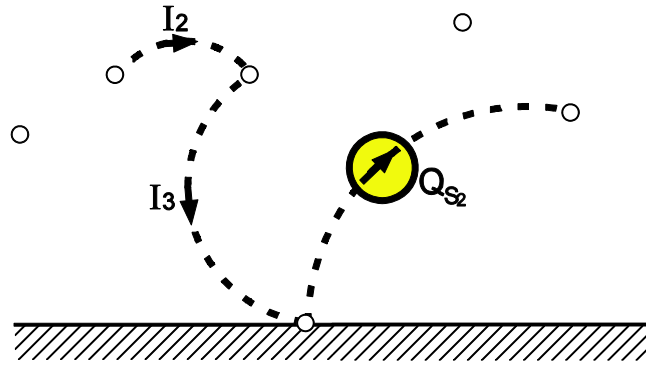
(γ) Κανονικό δένδρο



Σχήμα 2-3. Κανονικό δένδρο.

Σημείωση: Μία από τις αδράνειες ρευστού πρέπει να συμπεριληφθεί στο δένδρο (δείτε τον ορισμό του δένδρου). Επιλέγουμε να συμπεριλάβουμε το I_2 . Αυτό σημαίνει ότι το I_2 είναι ένα εξαρτημένο στοιχείο αποθήκευσης.

Δεσμοί του κανονικού δένδρου.



Σχήμα 2-4. Δεσμοί δένδρου.

Πρωτεύουσες μεταβλητές:

- Μεταβλητές τύπου “A” (across) στους κλάδους του κανονικού δένδρου.
- Μεταβλητές τύπου “T” (through) στους δεσμούς του δένδρου.

$$\Rightarrow \underbrace{P_{S_1}, P_{R_1}, P_{R_2}, P_{I_2}, P_C}_{\text{Κανονικό Δέντρο}}, \underbrace{Q_{I_1}, Q_{I_3}, Q_{S_2}}_{\text{Δεσμοί}}$$

Δευτερεύουσες μεταβλητές:

- Μεταβλητές τύπου “T” (through) στους κλάδους του κανονικού δένδρου.
- Μεταβλητές τύπου “A” (across) στους δεσμούς του δένδρου.

$$\Rightarrow Q_{S_1}, Q_{R_1}, Q_{R_2}, Q_{I_2}, Q_C, P_{I_1}, P_{I_3}, P_{S_2}$$

(δ)

Τάξη Συστήματος:

- Αριθμός στοιχείων τύπου “A” στο κανονικό δένδρο + αριθμός στοιχείων τύπου “T” στους δεσμούς του δένδρου.

$$\Rightarrow n = \underbrace{1}_C + \underbrace{2}_{I_1, I_3} = 3$$

Υπάρχουν 4 στοιχεία συσσώρευσης: I_1, I_2, I_3, C . Από αυτά, το I_2 είναι εξαρτημένο.

(ε)

Εξισώσεις Στοιχείων: $\Rightarrow B - S = 8 - 2 = 6$ εξισώσεις.

- Η πρωτεύουσα μεταβλητή θα πρέπει να εμφανιστεί στο αριστερό μέρος της εξίσωσης.

$$\frac{dQ_{I_1}}{dt} = \frac{1}{I_1} P_{I_1} \quad (1)$$

$$\frac{dQ_{I_3}}{dt} = \frac{1}{I_3} P_{I_3} \quad (2)$$

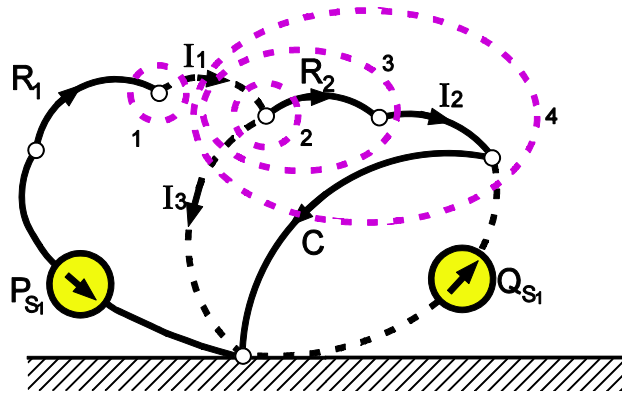
$$P_{I_2} = I_2 \frac{dQ_{I_2}}{dt} \quad (3)$$

$$\frac{dP_C}{dt} = \frac{1}{C} Q_C \quad (4)$$

$$P_{R_1} = R_1 Q_{R_1} \quad (5)$$

$$P_{R_2} = R_2 Q_{R_2} \quad (6)$$

Εξισώσεις Συνέχειας $\Rightarrow N - 1 - S_A = 6 - 1 - 1 = 4$ εξισώσεις.



Σχήμα 2-5. Κλειστές γραμμές για τις εξισώσεις συνέχειας.

- Άθροισμα των μεταβλητών τύπου “T” που εισέρχονται ή εξέρχονται από τους κόμβους στους οποίους η περιβάλλουσα κλειστή γραμμή συναντά μόνο έναν κλάδο του κανονικού δένδρου (εκτός από πηγές τύπου μεταξύ).

- Οι δευτερεύουσες μεταβλητές γράφονται στο δεξιό μέρος.

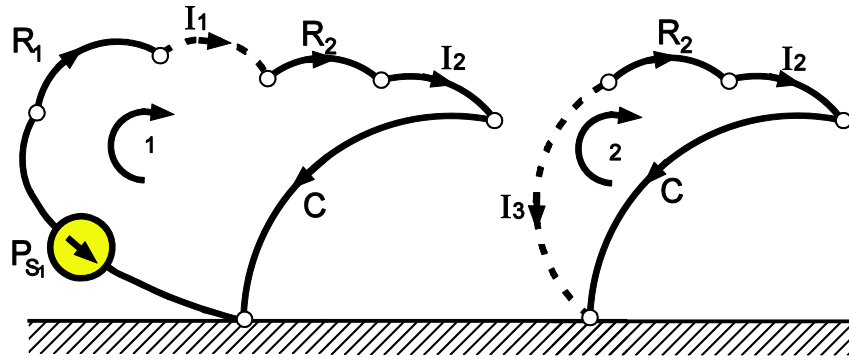
$$\#1: Q_{R_1} - Q_{I_1} = 0 \Rightarrow Q_{R_1} = Q_{I_1} \quad (7)$$

$$\#2: Q_{I_1} - Q_{I_3} - Q_{R_2} = 0 \Rightarrow Q_{R_2} = Q_{I_1} - Q_{I_3} \quad (8)$$

$$\#3: Q_{I_1} - Q_{I_3} - Q_{I_2} = 0 \Rightarrow Q_{I_2} = Q_{I_1} - Q_{I_3} \quad (9)$$

$$\#4: Q_{I_1} - Q_{I_3} - Q_C + Q_{S_2} = 0 \Rightarrow Q_C = Q_{I_1} - Q_{I_3} + Q_{S_2} \quad (10)$$

Εξισώσεις Συμβατότητας $\Rightarrow B - N + 1 - S_T = 8 - 6 + 1 - 1 = 2$ εξισώσεις



Σχήμα 2-6. Βρόχοι για τις εξισώσεις συμβατότητας.

- Άθροισμα των μεταβλητών τύπου “A” κατά μήκος ενός βρόχου που δημιουργείται αντικαθιστώντας έναν δεσμό δένδρου (εκτός από πηγές τύπου διαμέσου) στο κανονικό δένδρο. Στην περίπτωση μας κλείνουμε το βρόχο εισάγοντας είτε το I_1 (βρόχος 1) είτε το I_3 (βρόχος 2), όπως φαίνεται στο Σχήμα 6.

- Οι δευτερεύουσες μεταβλητές γράφονται στο αριστερό μέρος.

$$\#1: -P_{S_1} + P_{R_1} + P_{I_1} + P_{R_2} + P_{I_2} + P_C = 0 \Rightarrow P_{I_1} = P_{S_1} - P_{R_1} - P_{R_2} - P_{I_2} - P_C \quad (11)$$

$$\#2: P_{R_2} + P_{I_2} + P_C - P_{I_3} = 0 \Rightarrow P_{I_3} = P_{R_2} + P_{I_2} + P_C \quad (12)$$

Αντικαθιστούμε τις Εξ. (7) – (10) και (11) – (12) στις (1) – (6):

$$\frac{dQ_{I_1}}{dt} = \frac{1}{I_1} (P_{S_1} - P_{R_1} - P_{R_2} - P_{I_2} - P_C) \quad (13)$$

$$\frac{dQ_{I_3}}{dt} = \frac{1}{I_3} (P_{R_2} + P_{I_2} + P_C) \quad (14)$$

$$\frac{dP_C}{dt} = \frac{1}{C} (Q_{I_1} - Q_{I_3} + Q_{S_2}) \quad (15)$$

$$P_{I_2} = I_2 \frac{d}{dt} (Q_{I_1} - Q_{I_3}) \quad (16)$$

$$P_{R_1} = R_1 Q_{R_1} \quad (17)$$

$$P_{R_2} = R_2 (Q_{I_1} - Q_{I_3}) \quad (18)$$

Οι Εξ. (13) – (18) εκφράζονται ως προς τις πρωτεύουσες μεταβλητές.

Οι μεταβλητές κατάστασης είναι: Q_{I_1}, Q_{I_3}, P_C . Πρέπει να απαλείψουμε τις μεταβλητές $P_{I_2}, P_{R_1}, P_{R_2}$ από τις παραπάνω εξισώσεις. Μια επιπλέον δυσκολία είναι ότι εμφανίζονται παράγωγοι μεταβλητών κατάστασης στο δεξιό μέρος. Αυτό οφείλεται στο εξαρτημένο στοιχείο I_2 , και κάνει τον αλγεβρικό χειρισμό λίγο πιο δύσκολο.

Αντικαθιστούμε τις Εξ. (16) – (18) στις (13) – (15):

$$\dot{Q}_{I_1} = \frac{1}{I_1} (P_{S_1} - R_1 Q_{I_1} - R_2 (Q_{I_1} - Q_{I_3}) - I_2 (\dot{Q}_{I_1} - \dot{Q}_{I_3}) - P_C) \quad (19)$$

$$\dot{Q}_{I_3} = \frac{1}{I_3} (R_2 (Q_{I_1} - Q_{I_3}) + I_2 (\dot{Q}_{I_1} - \dot{Q}_{I_3}) + P_C) \quad (20)$$

$$\dot{P}_C = \frac{1}{C} (Q_{I_1} - Q_{I_3} + Q_{S_2}) \quad (21)$$

Οι Εξ. (19) – (20) αποτελούν σύστημα 2 γραμμικών εξισώσεων με 2 αγνώστους: $\dot{Q}_{I_1}, \dot{Q}_{I_3}$

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{I_1} (I_1 + I_2) + \dot{Q}_{I_3} (-I_2) &= \underbrace{P_{S_1} - R_1 Q_{I_1} - R_2 (Q_{I_1} - Q_{I_3}) - P_C}_{a_1} \\ \dot{Q}_{I_1} (-I_2) + \dot{Q}_{I_3} (I_3 + I_2) &= \underbrace{R_2 (Q_{I_1} - Q_{I_3}) + P_C}_{a_2} \end{aligned}$$

Από όπου προκύπτει:

$$\dot{Q}_{I_1} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & -I_2 \\ a_2 & I_3 + I_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} I_1 + I_2 & -I_2 \\ -I_2 & I_3 + I_2 \end{vmatrix}} = \frac{a_1 (I_3 + I_2) + a_2 I_2}{(I_1 + I_2)(I_3 + I_2) - I_2^2} = \frac{a_1 (I_3 + I_2) + a_2 I_2}{I_1 I_3 + I_1 I_2 + I_2 I_3}$$

$$\dot{Q}_{I_2} = \frac{\begin{vmatrix} I_1 + I_2 & a_1 \\ -I_2 & a_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} I_1 + I_2 & -I_2 \\ -I_2 & I_3 + I_2 \end{vmatrix}} = \frac{a_2 (I_1 + I_2) + a_1 I_2}{I_1 I_3 + I_1 I_2 + I_2 I_3}$$

Θέτουμε:

$$\Delta = I_1 I_3 + I_1 I_2 + I_2 I_3$$

Οι εξισώσεις κατάστασης είναι:

$$\dot{Q}_{I_1} = \frac{1}{\Delta} [(I_3 + I_2)(P_{S_1} - R_1 Q_{I_1} - R_2 (Q_{I_1} - Q_{I_3}) - P_C) + I_2 (R_2 (Q_{I_1} - Q_{I_3}) + P_C)]$$

$$\dot{Q}_{I_2} = \frac{1}{\Delta} [(I_1 + I_2)(R_2 (Q_{I_1} - Q_{I_3}) + P_C) + I_2 (P_{S_1} - R_1 Q_{I_1} - R_2 (Q_{I_1} - Q_{I_3}) - P_C)]$$

$$\dot{P}_C = \frac{1}{C} (Q_{I_1} - Q_{I_3} + Q_{S_2})$$

- Και σε μητρική μορφή:

$$\begin{bmatrix} \dot{Q}_{I_1} \\ \dot{Q}_{I_2} \\ \dot{P}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{(I_2+I_3)R_1+I_3R_2}{\Delta} & \frac{I_3R_2}{\Delta} & -\frac{I_3}{\Delta} \\ \frac{I_1R_2-I_2R_1}{\Delta} & -\frac{I_1R_2}{\Delta} & \frac{I_1}{\Delta} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{I_1} \\ Q_{I_2} \\ P_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{I_2+I_3}{\Delta} & 0 \\ \frac{I_2}{\Delta} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{S_1} \\ Q_{S_2} \end{bmatrix}$$