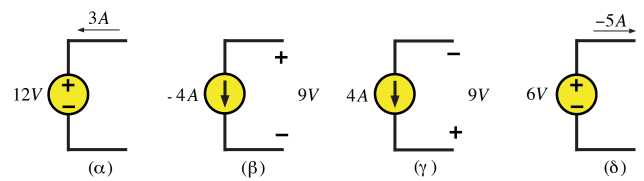
30Μέρος

1 Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 1

Προσδιορίστε το εάν οι πηγές του Σχ. 1-1 προσδίδουν ή απορροφούν ενέργεια από το κύκλωμα με το οποίο είναι συνδεδεμένες (το κύκλωμα δεν έχει σχεδιασθεί).



Σχήμα 1-1. Ανεξάρτητες πηγές.

Λύση

Η ισχύς δίδεται από τη σχέση

$$p = vi$$

Για οποιοδήποτε στοιχείο, το ρεύμα είναι θετικό εάν εισέρχεται από το θετικό ακροδέκτη. Σε αυτή τη περίπτωση, το στοιχείο απορροφά ισχύ (αλλιώς αποδίδει). Επομένως, έχουμε

(α) $p = 12 \cdot 3 = 36W > 0$, η πηγή απορροφά ισχύ (φορτίζεται).

(β) $p = 9 \cdot (-4) = -36W < 0$, η πηγή αποδίδει ισχύ (εκφορτίζεται).

(γ) $p = 9 \cdot (-4) = -36W < 0$, η πηγή αποδίδει ισχύ (εκφορτίζεται).

(δ) $p = 6 \cdot -(-5) = 30W > 0$, η πηγή απορροφά ισχύ (φορτίζεται). ■

Άσκηση 2

Μία ηλεκτρική αντίσταση $R = 4\Omega$ διαρρέεται από ρεύμα έντασης $i = 3\sin(\omega t)(A)$. Να υπολογισθούν η τάση, η ισχύς και η ενέργεια μετά από μία περίοδο. Δίνεται: $\omega = 500\pi rads^{-1}$.

Λύση

Η τάση, η ισχύς και η ενέργεια δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις:

$$v = Ri$$

$$p = vi = i^2 R$$

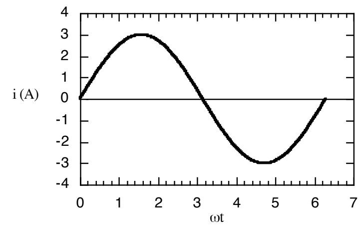
$$w = \int_0^t pdt$$

Αντικαθιστώντας στις παραπάνω σχέσεις τα δεδομένα της εκφώνησης προκύπτουν:

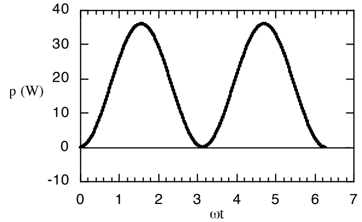
$$v = 12\sin(\omega t)$$

$$p = 36\sin^2(\omega t)$$

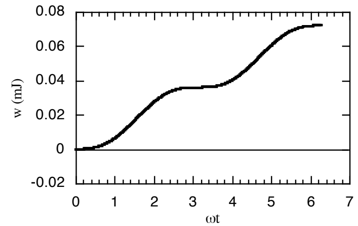
$$w = 36(\frac{t}{2} - \frac{\sin(2\omega t)}{4\omega})$$



Σχήμα 2-1. Απόκριση ρεύματος.



Σχήμα 2-2. Ισχύς σε συνάρτηση με το χρόνο.



Σχήμα 2-3. Ενέργεια σε συνάρτηση με το χρόνο.

Οι γραφικές παραστάσεις του ρεύματος, της ισχύος και της ενέργειας φαίνονται στα Σχ. 2-1, 2-2, 2-3 αντίστοιχα. Όπως φαίνεται η ισχύς είναι πάντα θετική και η ενέργεια αυξάνεται με το χρόνο. Αυτή η ενέργεια απορροφάται από τον αντιστάτη. ■

Άσκηση 3

Σε έναν επαγωγέα με αυτεπαγωγή $L = 5.0mH$ εφαρμόζεται τάση, η οποία περιγράφεται από το νόμο:

$$v = \begin{cases} 15V, & 0 < t < 2ms \\ -35V, & 2 < t < 4ms \end{cases}$$

Να σχεδιαστούν οι γραφικές παραστάσεις της τάσης και του ρεύματος σαν συνάρτηση του χρόνου.

Λύση

Για $0 < t < 2ms$ η ένταση του ρεύματος είναι:

$$i = \frac{1}{L}\int_0^t v dt = \frac{1}{5\times 10^{-3}}\int_0^t 15 dt = 3\times 10^3 t(A)$$

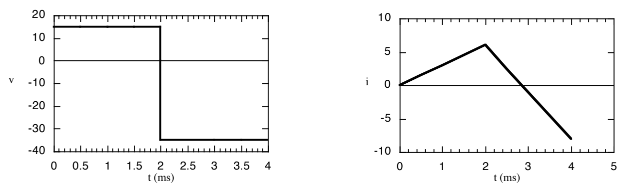
Για $t = 2ms$:

$$i = 6.0\,A$$

Και για $2 < t < 4ms$:

$$\begin{aligned} i &= 6.0 + \frac{1}{L}\int_{2\times 10^{-3}}^{t} v\,dt \\ &= 6.0 + \frac{1}{5\times 10^{-3}}\int_{2\times 10^{-3}}^{t} -35\,dt \\ &= 6.0 + \frac{1}{5\times 10^{-3}}[-35t + (70\times 10^{-3})](A) \\ &= 20 - (7\times 10^3 t)(A) \end{aligned}$$

Οι γραφικές παραστάσεις της τάσης και του ρεύματος σαν συνάρτηση του χρόνου φαίνονται στο Σχ. 3.



Σχήμα 3. Απόκριση τάσης και ρεύματος.

■

Άσκηση 4

Η τάση ενός πυκνωτή, χωρητικότητας $C = 50\mu F$, περιγράφεται από το νόμο: $v = 30\times 10^3 t(V)$, για $0 < t < 2ms$. Να σχεδιαστούν οι γραφικές παραστάσεις του ρεύματος, της ισχύος και της ενέργειας του πυκνωτή σε συνάρτηση με το χρόνο για το δοθέν διάστημα. Επίσης, να υπολογισθεί η μέγιστη ενέργεια του πυκνωτή.

Λύση

Για $0 < t < 2ms$, το ρεύμα, η ισχύς και η ενέργεια του πυκνωτή υπολογίζονται:

$$\begin{aligned} &i = C\frac{dv}{dt} = 50\times 10^{-6}\frac{d}{dt}(30\times 10^3 t) = 1.5\,A \\ &p = vi = (30\times 10^3 t)1.5 = 45\times 10^3 t(W) \\ &w_C = \int_0^t p dt = 2.25\times 10^4 t^2 (mJ) \end{aligned}$$

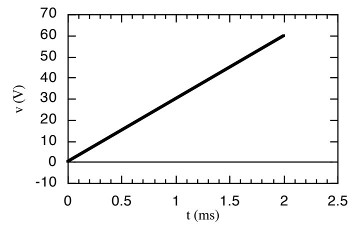
Η μέγιστη ενέργεια του πυκνωτή, για $t = 2ms$, υπολογίζεται:

$$w_{C\max} = (2.25\times 10^4)(2\times 10^3)^2 = 90\,mJ$$

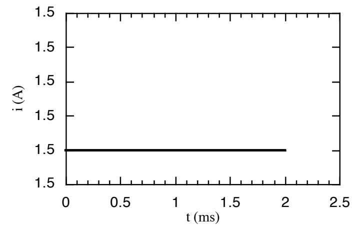
ή

$$w_{C\max} = \frac{1}{2}CV_{\max}^2 = \frac{1}{2}(50\times 10^{-6})(60)^2 = 90\,mJ$$

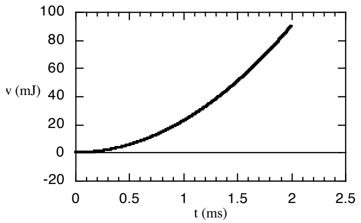
Οι ζητούμενες γραφικές παραστάσεις φαίνονται στα Σχ. 4-1, 4-2, 4-3.



Σχήμα 4-1. Απόκριση τάσης.



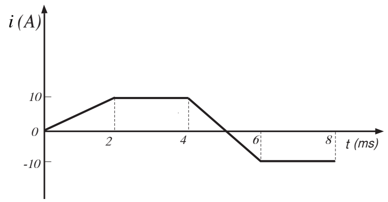
Σχήμα 4-2. Απόκριση ρεύματος.



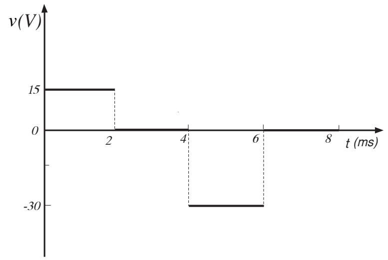
Σχήμα 4-3. Ενέργεια του πυκνωτή της άσκησης 5 σε συνάρτηση με το χρόνο. ■

Άσκηση 5

Οι γραφικές παραστάσεις της τάσης και του ρεύματος ενός απλού ηλεκτρικού στοιχείου δίνονται στα Σχ. 5-1, 5-2. Να ορίσετε το ηλεκτρικό στοιχείο.



Σχήμα 5-1. Απόκριση ρεύματος.



Σχήμα 5-2. Απόκριση τάσης.

Λύση

Το ηλεκτρικό στοιχείο δεν θα μπορούσε να είναι αντιστάτης, λόγω της μη αναλογίας της τάσης και του ρεύματος, όπως εξάλλου φαίνονται στις γραφικές παραστάσεις. Επίσης, για $2ms < t < 4ms, i \neq 0$, η τάση είναι σταθερή (μηδέν). Συνεπώς, το ηλεκτρικό στοιχείο δεν θα μπορούσε να είναι ούτε πυκνωτής. Για $0 < t < 2ms$ είναι:

$$\frac{di}{dt} = 5\times 10^3 A s^{-1}$$

και

$$v = 15V .$$

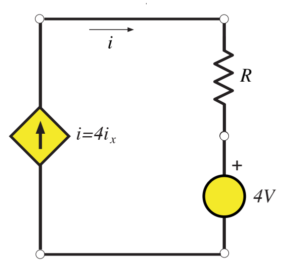
Άρα, καταλήγουμε στο συμπέρασμα, ότι το ηλεκτρικό στοιχείο είναι πηνίο, με συντελεστή αυτεπαγωγής,

$$L = v \,/\, \frac{di}{dt} = 3mH$$

Σημείωση: Εξετάστε την τιμή του συντελεστή αυτεπαγωγής στο διάστημα $4ms < t < 6ms$. ■

Άσκηση 6

Προσδιορίστε την τάση του αντιστάτη $R = 15\Omega$ (βλ. Σχ. 6-1), εάν το ρεύμα ελέγχου της εξαρτημένης πηγής ρεύματος i_x είναι: (α) $5A$, (β) $-3A$.



Σχήμα 6-1. Το κύκλωμα της άσκησης 6.

Λύση

Το ρεύμα που διαρρέει τον αντιστάτη δίνεται από τη σχέση:

$$i = 4i_x$$

Η τάση στα άκρα του αντιστάτη δίνεται από τη σχέση:

$$v_R = iR = 60i_x$$

Συνεπώς, για $i_x = 5A$ υπολογίζεται:

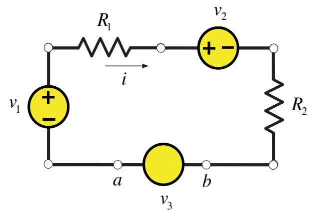
$$v = 300V$$

και για $i_x = -3A$ υπολογίζεται:

$$v = -180V$$ ■

Άσκηση 7

Να προσδιορισθεί η τάση v_3 και η πολικότητά της (Σχ. 7-1), εάν το ρεύμα, το οποίο διαρρέει το κύκλωμα είναι $0.50A$. Δίνονται: $R_1 = 10\Omega, R_2 = 30\Omega, v_1 = 40\,V, v_2 = 10\,V$.



Σχήμα 7-1. Το κύκλωμα της άσκησης 7.

Λύση

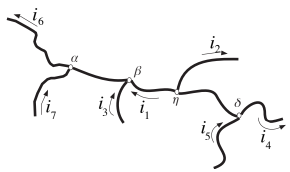
Ας υποθέσουμε ότι η τάση v_3 έχει την ίδια πολικότητα με την v_1. Εφαρμόζοντας το νόμο τάσεων του Kirchoff και ξεκινώντας από την κάτω αριστερή γωνία του κυκλώματος παίρνουμε:

$$v_1 - i(10) - v_2 - i(30) + v_3 = 0 \Leftrightarrow$$
$$40 - 5 - 10 - 15 + v_3 = 0 \Leftrightarrow$$
$$v_3 = -10V$$

Κατά συνέπεια η πολικότητα του σημείου (b) είναι θετική και του (a) αρνητική. ■

Άσκηση 8

Να προσδιορισθούν τα ρεύματα i_1, i_2 του δικτύου που φαίνεται στο Σχ. 9-1. Δίνονται: $i_6 = 2A, i_7 = 5A, i_3 = 10A, i_4 = 5A, i_5 = 12A.$



Σχήμα 8-1. Το δίκτυο της άσκησης 8.

Λύση

Τα σημεία (α), (β) αποτελούν έναν κόμβο, έστω τον (α-β). Εφαρμόζοντας το νόμο ρευμάτων του Kirchoff για τον κόμβο (α-β) παίρνουμε την παρακάτω εξίσωση:

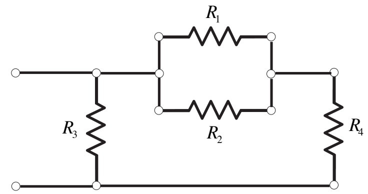
$$i_1 + 10 + 5 = 2 \Leftrightarrow i_1 = -13A$$

Η φορά της έντασης i_1, i_2 είναι η αντίθετη αυτής που σημειώθηκε. Κατά τον ίδιο τρόπο τα σημεία (γ), (δ) αποτελούν έναν κόμβο, έστω τον (γ-δ). Εφαρμόζοντας ξανά το νόμο ρευμάτων του Kirchoff για τον κόμβο (γ-δ) παίρνουμε την παρακάτω εξίσωση:

$$i_2 + 5 = 12 + 13 \Leftrightarrow i_2 = 20A$$ ■

Άσκηση 9

Να βρεθεί η ισοδύναμη αντίσταση του κυκλώματος που φαίνεται στο Σχ. 9-1. Δίνονται: $R_1 = 30\Omega, R_2 = 30\Omega, R_3 = 15\Omega, R_4 = 15\Omega.$



Σχήμα 9-1. Το κύκλωμα της άσκησης 9.

Λύση

Οι αντιστάσεις R_1, R_2 είναι παράλληλα συνδεδεμένες, πράγμα που σημαίνει ότι η ισοδύναμη αντίσταση των δύο αυτών αντιστάσεων είναι:

$$R_{eq_1} = \frac{(30)(30)}{(30+30)} = 15\Omega$$

Ο αντιστάτης αυτός συνδέεται σε σειρά με την αντίσταση R_4, άρα ισοδύναμη αντίσταση των δύο αυτών αντιστάσεων είναι:

$$R_{eq_2} = 15 + 15 = 30\Omega$$

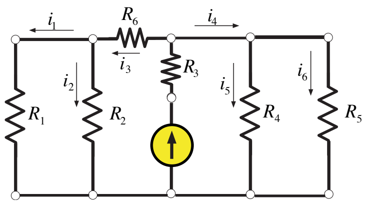
Η ζητούμενη, ισοδύναμη αντίσταση του κυκλώματος είναι:

$$R_{eq} = \frac{(30)(15)}{(30+15)} = 10\Omega,$$

αφού οι αντιστάσεις R_3, R_{eq_2} είναι συνδεδεμένες παράλληλα. ■

Άσκηση 10

Να υπολογισθούν τα ρεύματα σε όλους τους κλάδους του παρακάτω κυκλώματος (Σχ. 10-1). Δίνονται: $R_1 = 10\Omega, R_2 = 6\Omega, R_3 = 4\Omega, R_4 = 8\Omega, R_5 = 2\Omega, R_6 = 1\Omega.$ Η πηγή ρεύματος είναι $16.6A$.



Σχήμα 10-1. Το κύκλωμα της άσκησης 10.

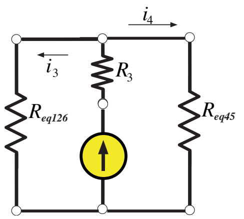
Λύση

Οι αντιστάσεις R_1, R_2 είναι παράλληλα συνδεδεμένες μεταξύ τους και με την R_6 είναι συνδεδεμένες σε σειρά. Κατά συνέπεια, η ισοδύναμη αντίσταση των R_1, R_2, R_6 είναι η:

$$R_{eq126} = \frac{(10)(6)}{(10+6)} + 1 = 4.75\Omega$$

Επίσης, οι αντιστάσεις R_4, R_5 είναι παράλληλα συνδεδεμένες, άρα ισοδύναμη αντίστασή τους υπολογίζεται:

$$R_{eq45} = \frac{(8)(2)}{(8+2)} = 1.6\Omega$$



Σχήμα 10-2. Ισοδύναμο κύκλωμα της άσκησης 10.

Έτσι, παίρνουμε ένα νέο κύκλωμα που εικονίζεται στο Σχ. 10-2. Τα ρεύματα υπολογίζονται από το νόμο ρευμάτων και τάσεων του Kirchoff. Πράγματι:

$$\begin{aligned} 4.75 i_3 &= 1.6 i_4 \\ 16.6 &= i_3 + i_4 \end{aligned}$$

Από τις δύο τελευταίες σχέσεις προκύπτουν οι τιμές των ρευμάτων i_3, i_4:

$$\begin{aligned} i_3 &= 4.18A \\ i_4 &= 12.42A \end{aligned}$$

Επιστρέφοντας στο αρχικό κύκλωμα του Σχ. 10-1, υπολογίζουμε και τα υπόλοιπα ρεύματα των κλάδων. Είναι:

$$\begin{aligned} 10 i_1 &= 6 i_2 \\ 4.18 &= i_2 + i_1 \\ 2 i_6 &= 8 i_5 \\ 12.42 &= i_5 + i_6 \end{aligned}$$

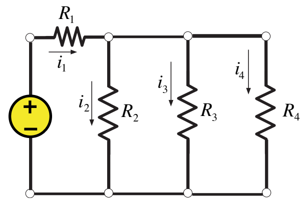
Από τις τελευταίες σχέσεις προκύπτουν οι τιμές των ρευμάτων i_1, i_2, i_5, i_6:

$$\begin{aligned} i_1 &= 1.5675A \\ i_2 &= 2.6125A \\ i_5 &= 2.4840A \\ i_6 &= 9.9360A \end{aligned}$$

■

Άσκηση 11

Να υπολογισθούν τα ρεύματα σε όλους τους κλάδους του παρακάτω κυκλώματος (Σχ. 11-1). Δίνονται: $R_1 = 10\Omega, R_2 = 16\Omega, R_3 = 4\Omega, R_4 = 13\Omega$. Η τάση της πηγής είναι $55V$.



Σχήμα 11-1. Το κύκλωμα της άσκησης 11.

Λύση

Εφαρμόζοντας τους νόμους του Kirchoff (τάσεων και ρευμάτων) εξάγονται οι σχέσεις:

$$\begin{aligned} 16 i_2 &= 4 i_3 \\ 16 i_2 &= 13 i_4 \\ 55 &= 10 i_1 + 16 i_2 \\ i_1 &= i_2 + i_3 + i_4 \end{aligned}$$

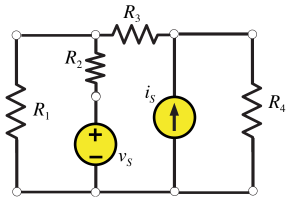
Από τις τελευταίες σχέσεις προκύπτουν οι τιμές των ρευμάτων i_1, i_2, i_3, i_4:

$$\begin{aligned} i_1 &= 4.38A \\ i_2 &= 0.70A \\ i_3 &= 2.80A \\ i_4 &= 0.80A \end{aligned}$$

■

Άσκηση 12

Να υπολογιστεί το ρεύμα που διαρρέει την αντίσταση R_4 (Σχ. 12-1) χρησιμοποιώντας την αρχή της επαλληλίας στις εξής δύο περιπτώσεις (α) Θεωρείστε ότι η πηγή ρεύματος μηδενίζεται, δηλαδή ότι είναι ανοικτοκύκλωμα, (β) θεωρείστε ότι η πηγή τάσεως μηδενίζεται, δηλαδή ότι είναι βραχυκύκλωμα. Στη συνέχεια, υπολογίστε το ζητούμενο ρεύμα σαν επαλληλία των ρευμάτων που υπολογίσατε στις περιπτώσεις (α) και (β). Δίνονται: $R_1 = 12\Omega$, $R_2 = 18\Omega$, $R_3 = 2\Omega$, $R_4 = 20\Omega$ και $v_s = 180V$, $i_s = 18A$.

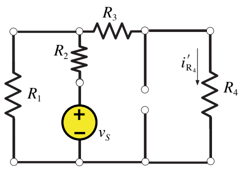


Σχήμα 12-1. Κύκλωμα της άσκησης 12.

Λύση

(α) Θεωρούμε το κύκλωμα του Σχ. 12-2 και σαν υποκύκλωμα τη πηγή τάσεως. Αφαιρώντας τη πηγή τάσεως από το κύκλωμα, υπολογίζουμε την ισοδύναμη αντίσταση στους ακροδέκτες όπου ήταν συνδεδεμένη σαν

$$R_{eq} = R_2 + \frac{R_1(R_3+R_4)}{R_1+R_3+R_4} = 18 + \frac{12(2+20)}{12+2+20} = 25.76\Omega$$



Σχήμα 12-2. Κύκλωμα της άσκησης 12.

Το ρεύμα που διέρχεται από τη πηγή είναι:

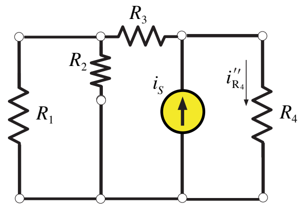
$$i_s = \frac{v_s}{R_{eq}} = \frac{180}{25.76} = 6.99A$$

Επομένως, το ρεύμα που διέρχεται από την αντίσταση R_4 υπολογίζεται με διαίρεση ρεύματος μεταξύ της R_1 και της R_3+R_4

$$(i_{R_4})' = \frac{R_1}{R_1+R_3+R_4} i_s = \frac{12}{34} 6.99 = 2.47A$$

(β) Όταν ενεργεί μόνο η πηγή ρεύματος στο κύκλωμα (Σχ. 12-3), τότε η ισοδύναμη αντίσταση των αντιστάσεων R_1, R_2, R_3 είναι:

$$R_{eq123} = R_3 + \frac{R_1R_2}{R_1+R_2} = 2 + \frac{12(18)}{12+18} = 9.2\Omega$$



Σχήμα 12-3. Κύκλωμα της άσκησης 12.

Το ρεύμα που διαρρέει σε αυτήν την περίπτωση την αντίσταση R_4 είναι:

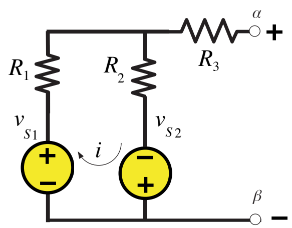
$$(i_{R_4})'' = \frac{R_{eq123}}{R_{eq123}+R_4} i_s = \frac{9.2}{9.2+20} 18 = 5.67A$$

Συνεπώς, το ολικό ρεύμα που διαρρέει την αντίσταση R_4 με επαλληλία είναι:

$$i_{R_4} = (i_{R_4})' + (i_{R_4})'' = 2.47 + 5.67 = 8.14A \qquad \blacksquare$$

Άσκηση 13

Να βρεθούν τα ισοδύναμα κυκλώματα κατά Thevenin και κατά Norton του υποκυκλώματος που παρίσταται στο Σχ. 13-1 και να επιλυθούν. Δίνονται: $R_1 = 2\Omega, R_2 = 11\Omega, R_3 = 6\Omega$ και $v_{s1} = 18V, v_{s2} = 12V$.



Σχήμα 13-1. Το κύκλωμα της άσκησης 13.

Λύση

Το υποκύκλωμα αυτό περιέχει μόνο ανεξάρτητες πηγές, άρα για να βρούμε το ισοδύναμο κατά Thevenin αρκεί να βρούμε την τάση $v_{\alpha\beta}$ και την αντίσταση που θα έβλεπε ένα βολτόμετρο συνδεδεμένο στους ακροδέκτες αβ αφού μηδενισθούν οι πηγές.

Γράφοντας το ΝΤΚ για το βρόχο με τις δύο πηγές έχουμε:

$$-v_{s1} - v_{s2} + i(R_1+R_2) = 0$$

Επομένως, το ρεύμα που διαρρέει το βρόχο είναι

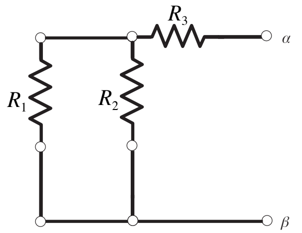
$$i = \frac{v_{s1} + v_{s2}}{R_1 + R_2} = \frac{18+12}{2+11} = 2.3A$$

Επειδή η αντίσταση R_3 δεν διαρρέεται από ρεύμα, η τάση $v_{\alpha\beta}$ είναι ίση με την τάση των δύο παράλληλων κλάδων. Η τάση αυτή, υπολογισμένη για τον αριστερό κλάδο είναι

$$v_{\alpha\beta} = v_T = v_{s_1} - Ri = 18 - 2\cdot 2.3V = 13.38V$$

Η ισοδύναμη αντίσταση του κυκλώματος όπως φαίνεται από τους ακροδέκτες αβ υπολογίζεται αφού βραχυκυκλωθούν οι πηγές, βλ. Σχ. 13-2.

$$R_T = R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 6 + \frac{(2)(11)}{2+11} = 7.692\Omega$$



Σχήμα 13-2. Υπολογισμός αντίστασης από ακροδέκτες αβ.

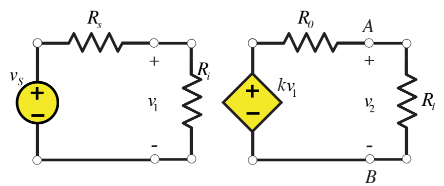
Το ισοδύναμο κατά Norton αποτελείται από την αντίσταση Thevenin παράλληλα με πηγή ρεύματος μέτρου

$$i_\beta = i_T = v_T / R_T = 13.38 / 7.692 = 1.739A$$

■

Άσκηση 14

Η αντίσταση R_l διαρρέεται από ρεύμα μέσω της ελεγχόμενης τάσης που φαίνεται στο κύκλωμα του Σχ. 14-1 που ακολουθεί. Αυτό επιτυγχάνεται με τη βοήθεια της εσωτερικής αντίστασης R_i και της εξωτερικής R_o. Να υπολογισθεί ο λόγος τάσεων v_2 / v_s.



Σχήμα 14-1. Το κύκλωμα της άσκησης 14.

Λύση

Λόγω της διαίρεσης τάσης ισχύει:

$$v_1 = \frac{R_i}{R_s + R_i} v_s$$

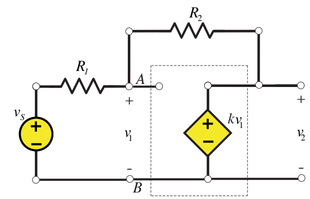
Κατά τον ίδιο τρόπο η τάση εξόδου είναι:

$$v_2 = kv_1 \frac{R_l}{R_l + R_o} = k\frac{R_l R_i}{(R_l + R_o)(R_i + R_s)} v_s \Leftrightarrow$$
$$\frac{v_2}{v_s} = k\frac{R_l R_i}{(R_l + R_o)(R_i + R_s)}$$

■

Άσκηση 15

Να προσδιοριστεί ο λόγος τάσεων v_2 / v_s (βλ. Σχ. 15-1) σαν συνάρτηση του λόγου $b \equiv R_1 / (R_1 + R_2)$. Επίσης, είναι γνωστό ότι ισχύει: $v_2 = kv_1$



Σχήμα 15-1. Το κύκλωμα της άσκησης 15.

Λύση

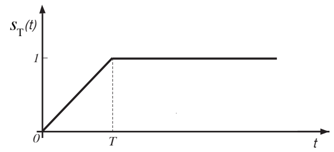
Από το νόμο ρευμάτων του Kirchoff, χρησιμοποιώντας και το νόμο του Ohm προκύπτει η σχέση:

$$\frac{v_1 - v_s}{R_1} + \frac{v_1 - v_2}{R_2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\frac{v_2}{k} - v_s}{R_1} + \frac{\frac{v_2}{k} - v_2}{R_2} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\frac{v_2}{v_s} = \frac{R_2 k}{R_2 + R_1 - kR_1} = (1-b)\frac{k}{1-bk}$$

■

Άσκηση 16

Η τάση στα άκρα ενός πυκνωτή χωρητικότητας $150nF$ αυξάνεται γραμμικά με το χρόνο από 0 σε $15V$ (βλ. Σχ. 16-1). (α) Να βρεθεί το φορτίο του πυκνωτή για χρόνο $t = T$ και (β) Να υπολογισθεί το ρεύμα που διαρρέει τον πυκνωτή για χρόνο $T = 1.5s$, $T = 1.5ms$, $T = 1.5\mu s$.



Σχήμα 16-1. Η απόκριση της τάσης του πυκνωτή της άσκησης 16.

Λύση

(α) Για $t = T$, η τάση στα άκρα του πυκνωτή είναι $v_c = 15V$. Το φορτίο του πυκνωτή τότε θα είναι:

$$Q = Cv_c = 1.5\times10^{-7}\times15 = 2.25\times10^{-6}C$$

(β) Η ένταση του ρεύματος που διαρρέει τον πυκνωτή δίνεται από τη σχέση:

$$i_c(t) = C\frac{dv_c}{dt}$$

Σύμφωνα με το Σχ. 1 το ρεύμα υπολογίζεται:

$$i_c(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ i_o = 2.25\times10^{-6}/T(A) & t<0<T \\ 0 & t>T \end{cases}$$

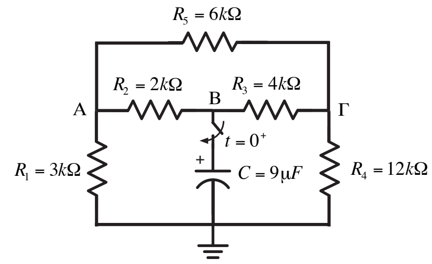
Για $T = 1.5s$ προκύπτει $i_0 = 0.67\times10^{-6}A$. Για $T = 1.5ms$ προκύπτει $i_0 = 0.67\times10^{-3}A$ και για $T = 1.5\mu s$, προκύπτει $i_0 = 0.67A$. Και για τις τρεις αυτές περιπτώσεις ο πυκνωτής αποθηκεύει φορτίο (με το πέρασμα μίας περιόδου T), το οποίο είναι:

$$Q = \int_0^T i_c(t)dt = i_0 T = 2.25\times10^{-6}C$$

Σημείωση: Η τιμή του φορτίου του πυκνωτή για $t = T$ είναι ανεξάρτητη του T . ■

Άσκηση 17

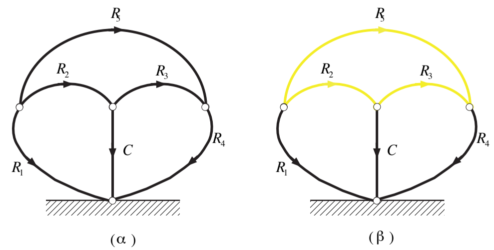
Ο πυκνωτής του Σχ. 17-1 συνδέεται με το υπόλοιπο κύκλωμα σε χρόνο t = 0. Λίγο πριν τη σύνδεσή του, η τάση του ήταν $v_C(0^-) = 12V$. Να ευρεθεί η απόκριση των τάσεων των αντιστάσεων R_2 και R_3 καθώς και τα *δυναμικά* των σημείων A και B, για t > 0.



Σχήμα 17-1. Κύκλωμα με ένα πυκνωτή.

Λύση

Κατασκευάζουμε το γραμμικό γράφο του κυκλώματος (Σχ. 17-2α) και το κανονικό δένδρο (με μαύρη γραμμή στο Σχ. 17-2β). Βάσει αυτών έχουμε



Σχήμα 17-2. (α) Γραμμικός γράφος και (β) κανονικό δένδρο και δεσμοί.

Στη συνέχεια γράφουμε τις εξισώσεις των στοιχείων, με τις πρωτεύουσες μεταβλητές στο αριστερό μέρος.

Εξισώσεις Στοιχείων

$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{1}{C}i_C$$

$$v_{R_1} = i_{R_1}R_1$$

$$i_{R_2} = v_{R_2}/R_2$$

$$i_{R_3} = v_{R_3}/R_3$$

$$v_{R_4} = i_{R_4}R_4$$

$$i_{R_5} = v_{R_5}/R_5$$

ΝΤΚ με τις δευτερεύουσες μεταβλητές στο αριστερό μέρος.

$$-v_{R_1}+v_{R_2}+v_C=0 \Rightarrow v_{R_2}=v_{R_1}-v_C$$

$$v_{R_4}+v_{R_3}-v_C=0 \Rightarrow v_{R_3}=v_C-v_{R_4}$$

$$-v_{R_1}+v_{R_5}+v_{R_4}=0 \Rightarrow v_{R_5}=v_{R_1}-v_{R_4}$$

NPK με τις δευτερεύουσες μεταβλητές στο αριστερό μέρος.

$$-i_{R_1}-i_{R_2}-i_{R_5}=0 \Rightarrow i_{R_1}=-i_{R_2}-i_{R_5}$$

$$i_{R_2}-i_C-i_{R_3}=0 \Rightarrow i_C=i_{R_2}-i_{R_3}$$

$$i_{R_5}+i_{R_3}-i_{R_4}=0 \Rightarrow i_{R_4}=i_{R_5}+i_{R_3}$$

Με αντικατάσταση στην εξίσωση στοιχείου του πυκνωτή, έχουμε

$$\frac{dv_C}{dt}=\frac{1}{C}\left(v_{R_2}/R_2-v_{R_3}/R_3\right)$$

Επειδή έχουμε πολλές αλγεβρικές σχέσεις, είναι προτιμητέο να βρούμε τη κάθε τάση στη παραπάνω σχέση ξεχωριστά. Οι εξισώσεις με τα ρεύματα δίνουν

$$v_{R_1}/R_1+v_{R_2}/R_2+v_{R_5}/R_5=0$$

$$v_{R_3}/R_3-v_{R_4}/R_4+v_{R_5}/R_5=0$$

Εάν προσθέσουμε τις εξισώσεις των τάσεων που γράφτηκαν παραπάνω, δηλαδή,

$$v_{R_1}-v_{R_2}=v_C$$

$$v_{R_4}+v_{R_3}=v_C$$

$$-v_{R_1}+v_{R_5}+v_{R_4}=0$$

έχουμε ένα σύστημα 5 εξισώσεων με 5 αγνώστους, τις τάσεις των αντιστάσεων. Επιλύουμε αυτό το αλγεβρικό σύστημα και έχουμε διαδοχικά

$$v_{R_1}=\left(v_C/R_2-v_5/R_5\right)\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$$

$$v_{R_4}=\left(v_C/R_3+v_5/R_5\right)\frac{R_3R_4}{R_3+R_4}$$

$$v_{R_5}=\frac{\left(R_1R_3-R_2R_4\right)R_5}{\left(R_1R_2(R_3+R_4)+R_3R_4(R_1+R_2)+R_5(R_1+R_2)(R_3+R_4)\right)}v_C=-0,0714v_C$$

Τότε έχουμε

$$v_{R_1}=\left(v_C/R_2-v_5/R_5\right)\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}=0,6143v_C$$

$$v_{R_4}=\left(v_C/R_3+v_5/R_5\right)\frac{R_3R_4}{R_1+R_4}=0,7143v_C$$

$$v_{R_2}=v_{R_1}-v_C=-0,3857v_C$$

$$v_{R_3}=v_C-v_{R_4}=0,2857v_C$$

και

$$\frac{dv_C}{dt}=\frac{1}{C}\left(v_{R_2}/R_2-v_{R_3}/R_3\right)=-\frac{1}{9\cdot10^{-6}}0,2643\cdot10^{-3}v_C=-29,36v_C$$

Η απόκριση της εξίσωσης κατάστασης είναι

$$v_C(t)=12e^{-29,36t}\ V$$

και η χρονική σταθερά είναι

$$\tau=\frac{1}{29,36}s=0,0341s=34ms$$

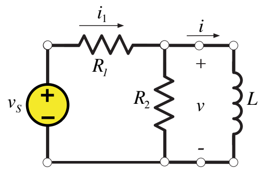
Η εξίσωση εξόδου δίνει το τελικό αποτέλεσμα

$$\begin{bmatrix}v_{R_2}\\v_{R_3}\\v_A\\v_B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0,3857\\0,2857\\0,6143\\1\end{bmatrix}v_C(t)=\begin{bmatrix}4,6284e^{-29,36t}\\3,4284e^{-29,36t}\\7,3716e^{-29,36t}\\12,00e^{-29,36t}\end{bmatrix}V$$

■

Άσκηση 18

Να υπολογισθούν τα i,v,i_1 του κυκλώματος που εικονίζεται στο Σχ. 18-1. Δίνονται: $R_1=12\Omega, R_2=6\Omega, L=5mH$. Η πηγή τάσης v_s είναι βηματικής μορφής συνάρτηση με πλάτος 9 V.



Σχήμα 18-1. Το κύκλωμα της άσκησης 18.

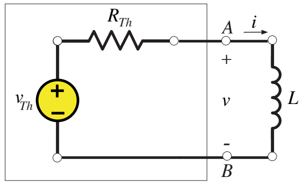
Λύση

Σύμφωνα με το θεώρημα Thevenin το κύκλωμα παίρνει τη μορφή του Σχ. 18-2, όπου

$$R_{Th} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 4\Omega$$

και

$$v_{Th} = \frac{6}{12+6} 9V = 3\,V$$



Σχήμα 18-2. Το ισοδύναμο κύκλωμα Thevenin της άσκησης 18.

Η σταθερά χρόνου του κυκλώματος είναι:

$$\tau = \frac{L}{R_{Th}} = 1.25\,ms$$

Η αρχική τιμή του ρεύματος είναι μηδέν, ενώ η τελική υπολογίζεται:

$$i(\infty) = \frac{v_{Th}}{R_{Th}} = \frac{3}{4}\,A = 0.75\,A$$

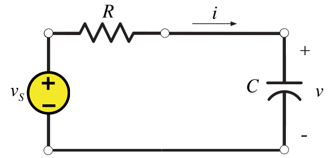
Η σχέσεις που δίνουν το ρεύμα i, την τάση v και το ρεύμα i_1 είναι αντίστοιχα:

$$i = 0.75(1-e^{-800t})\,A,\ v = L\frac{di}{dt} = 3e^{-800t}\,V,$$
$$i_1 = \frac{9-v}{12} = \frac{1}{4}(3-e^{-800t})\,A$$

Όλες οι αποκρίσεις ισορροπούν σε χρόνο ίσο με τέσσερις χρονικές σταθερές, δηλ. σε 5 ms. ■

Άσκηση 19

Στο Σχ. 19-1 που ακολουθεί, η πηγή τάσης δίνεται από τη σχέση: $v_s = V_0[u(t)-u(t-\mathrm{T})]$. Επίσης, δίνονται: $R_1 = 1k\Omega, C = 1\mu F$. Να υπολογισθεί το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα για τις περιπτώσεις: (α) $V_0 = 1V, \mathrm{T} = 1ms$, (β) $V_0 = 10V, \mathrm{T} = 0.1ms$, (γ) $V_0 = 100V, \mathrm{T} = 0.01ms$.



Σχήμα 19-1. Το κύκλωμα της άσκησης 19.

Λύση

Η σταθερά χρόνου του κυκλώματος είναι:

$$\tau = RC = 1ms$$

Στη συνέχεια δεχόμαστε με μικρή απόκλιση του σφάλματος ότι για $t << 1$ είναι $e^{-t} \cong 1-t$. Επίσης, η τάση εκφράζεται σε V, το ρεύμα σε mA και ο χρόνος σε ms. Έτσι, για τις τρεις περιπτώσεις έχουμε:

(α) Για $0 < t < 1ms$, είναι:

$$v = 1-e^{-t},\ i = e^{-t},\ V_T = 1-e^{-t} = 0.632\,V$$

και για $t > 1ms$:

$$v = 0.632e^{-(t-1)} = 1.72e^{-t},\ i = -1.72e^{-t}$$

(β) Για $0 < t < 1ms$, είναι:

$$v = 10(1-e^{-t}) = 1.05e^{-t},\ i = 10e^{-t},\ V_T = 10(1-e^{-t}) = 0.95\,V$$

και για $t > 0.1ms$:

$$v = 0.95e^{-(t-0.1)} = 1.05e^{-t},\ i = -1.05e^{-t}$$

(γ) Για $0 < t < 0.01ms$, είναι:

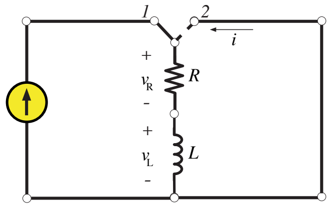
$$v = 100(1-e^{-t}) \cong 100t,\ i = 100e^{-t} \cong 100(1-t),\ V_T = 100(1-e^{-0.01}) = 0.995\,V$$

και για $t > 0.01ms$:

$$v = 0.995e^{-(t-0.01)} = 1.01e^{-t}\,,\; i = -1.01e^{-t}$$ ■

Άσκηση 20

Στο κύκλωμα του Σχ. 20-1 που ακολουθεί η πηγή ρεύματος είναι 3A. Επίσης, δίνονται: $R = 120\Omega$ και $L = 3.2H$. Να υπολογισθούν οι τάσεις του αντιστάτη και του πηνίου v_R και v_L αντίστοιχα καθώς και πολικότητά τους τη στιγμή που ο διακόπτης από τη θέση 1 μεταβαίνει στη θέση 2 .



Σχήμα 20-1. Το κύκλωμα της άσκησης 20.

Λύση

Για $t > 0.01\,ms$, δηλαδή μετά τη χρονική στιγμή που ο διακόπτης από τη θέση 1 πάει στη θέση 2, το ρεύμα του κυκλώματος είναι:

$$i = I_0 e^{-tR/L} = 3e^{-37.5t}(A)$$

Η τάση στα άκρα του αντιστάτη είναι:

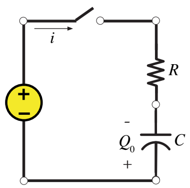
$$v_R = Ri = 360e^{-37.5t}(V)$$

Ενώ η τάση στα άκρα του πηνίου είναι:

$$v_L = -v_R = -360e^{-37.5t}(V)$$ ■

Άσκηση 21

Ο πυκνωτής του Σχ. 21 έχει φορτισθεί από πηγή αντίθετης πολικότητας από αυτή του κυκλώματος και έχει φορτίο $Q_0 = 340\mu C$ όταν ο διακόπτης του κυκλώματος είναι ανοικτός. Σε χρόνο $t = 0$ ο διακόπτης κλείνει. Να προσδιορισθεί το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα και το φορτίο του πυκνωτή για χρόνο $t > 0$. Δίνονται: $R = 3k\Omega,\ C = 17\mu F$ και η τάση πηγής $v_1 = 63\,V$.



Σχήμα 21-1. Το κύκλωμα της άσκησης 21.

Λύση

Η τάση στα άκρα του πυκνωτή όταν έχει φορτίο $Q_0 = 340\mu C$ είναι:

$$V_0 = \frac{Q_0}{C} = \frac{340}{17} = 20\,V$$

Επομένως, τη στιγμή που κλείσει ο διακόπτης, η τάση του πυκνωτή είναι

$$v_C(0^+) = -20\,V$$

Η τάση του πυκνωτή αυξάνεται με το χρόνο και γίνεται μέγιστη για $v_C(\infty) = v_1 = 63\,V$, με χρονική σταθερά $\tau = RC = 0.051\,s$. Η τάση του πυκνωτή δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} v_C &= [v_c(0^+) - v_c(\infty)]e^{-t/\tau} + v_c(\infty) \\ &= -83e^{-19.6t} + 63 \qquad (V) \end{aligned}$$

και το φορτίο του είναι:

$$q(t) = Cv_C(t) = -1.4e^{-19.6t} + 1.07 \qquad (mC)$$

Το ρεύμα υπολογίζεται από τη σχέση:

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = 27.44e^{-19.6t} \qquad (mA)$$ ■

Άσκηση 22

Ένα κύκλωμα RLC σε σειρά με: $R = 35\Omega, L = 0.5\text{H}, C = 70\mu F$, έχει τη χρονική στιγμή $t = 0$ τάση στα άκρα του πηνίου $v_L(0^+) = 125V$. Να προσδιορισθεί το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα, υποθέτοντας ότι τη χρονική στιγμή $t = 0$ το ρεύμα είναι 0.

Λύση

Με βάση τη διαφορική εξίσωση που διέπει το κύκλωμα η ιδιοσυχνότητα του κυκλώματος είναι:

$$\omega_n^2 = \frac{1}{LC}$$

και επίσης, είναι:

$$\zeta\omega_n = \frac{R}{2L} = \frac{35}{2(0.5)} = 35\,,$$

όπου ζ είναι ο λόγος απόσβεσης. Η φυσική συχνότητα με απόσβεση δίνεται από τη σχέση:

$$\omega_d = \sqrt{(\zeta\omega_n)^2 - \omega_n^2} = j165.37\,rads^{-1}$$

Η γενική λύση του ρεύματος προσδιορίζεται από τη σχέση:

$$i = e^{-35t}[A\cos(165.37t) + B\sin(165.37t)](mA) \ (1)$$

και

$$\frac{di}{dt} = e^{-35t}[-35A + 165.37B]\cos(165.37t) - e^{-35t}[35B + 165.37A]\sin(165.37t)(mAs^{-1}) \ (2)$$

Στην εξίσωση (1) οι σταθερές A, B θα υπολογισθούν από τις οριακές συνθήκες του προβλήματος. Πράγματι:

$$i(0^+) = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} A = 0 \ (3)$$

και

$$\left.\frac{di}{dt}\right|_{0^+} = \frac{v_L(0^+)}{L} = \frac{125}{0.5} = 250 \ (mAs^{-1}) \quad (4),$$

άρα, από τις (3) και (4) παίρνουμε:

$$B = 1.5 \ (5)$$

Έτσι, η απόκριση του ρεύματος γράφεται:

$$i = e^{-35t}[1.5\sin(165.37t)](A)$$ ■

Άσκηση 23

Να προσδιορισθεί η σύνθετη αντίσταση ενός κυκλώματος LC σε παράλληλη σύνδεση, με $L = 63m\mathrm{H}$, $C = 14\mu F$, και τάση $v = 60\sin(200t + 45^\circ)(V)$.

Λύση

Η αντίσταση είναι ανεξάρτητη της συχνότητας.

Για $\omega = 200\,rad/s$, η επαγωγική αντίσταση είναι:

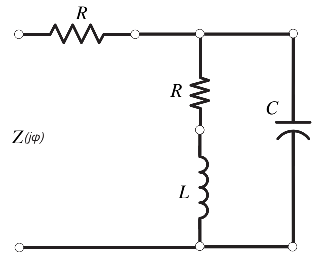
$$j\omega L = (j200)(63\times10^{-3}) = j12.6\,\Omega$$

και η χωρητική αντίσταση είναι:

$$\frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j(200)(14\times10^{-6})} = -j357.1\,\Omega$$ ■

Άσκηση 24

Να προσδιορισθεί η σύνθετη αντίσταση $Z(j\omega)$ του κυκλώματος του Σχ. 24-1 για τις εξής περιπτώσεις: (α) $j\omega = 0$, (β) $j\omega = j3.7\,rads^{-1}$, (γ) $j\omega \to \infty$. Δίνονται: $R = 12\Omega,\ Z_C = 3.1/(j\omega)(\Omega),\ Z_L = 4j\omega(\Omega)$.



Σχήμα 24-1. Το κύκλωμα της άσκησης 24.

Λύση

Η σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος είναι:

$$Z(j\omega) = 12 + \frac{(12+4j\omega)(\frac{3.1}{j\omega})}{(12+4j\omega) + \frac{3.1}{j\omega}} = \frac{12(j\omega)^2 + 39.1(j\omega) + 18.6}{(j\omega)^2 + 3(j\omega) + 0.78}\,\Omega \qquad (1)$$

Για τις τρεις περιπτώσεις είναι:

(α) Για $j\omega = 0$, η Εξ. (1) δίνει:

$$Z(j\omega) = 24.00\Omega$$

(β) Για $j\omega = j3.7\,rads^{-1}$, η Εξ. (1) δίνει:

$$Z(j\omega) = 12 - 0.85j\Omega = 12.03\angle -4.05^\circ\,\Omega$$

(γ) Και για $j\omega \to \infty$, τότε από την Εξ. (1) παίρνουμε ότι:

$$Z(j\omega) = \lim_{j\omega\to\infty} \frac{12(j\omega)^2 + 39.1(j\omega) + 18.6}{(j\omega)^2 + 3(j\omega) + 0.78} = 12\Omega$$ ■

Άσκηση 25

Να προσδιορισθεί η τάση ενός πηνίου με αυτεπαγωγή $L = 13.33\,m\mathrm{H}$, το οποίο διαρρέεται από ρεύμα $i = 3.2\cos(1500t)(A)$.

Λύση

Η τάση του πηνίου δίνεται από τη σχέση:

$$v_L = L\frac{di}{dt} = \omega L i_{\max}\cos(\omega t + 90^\circ) \quad (1)$$

Με αντικατάσταση των δεδομένων στην (1) προκύπτει ότι η τάση του πηνίου είναι:

$$v_L = -64\sin(1500t)\,(V)$$ ■

Άσκηση 26

Το ρεύμα ενός κυκλώματος RL σε σειρά έχει διαφορά φάσης με την εφαρμοζόμενη τάση του κυκλώματος 65°. Να προσδιορισθεί η σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος και η πηγή συχνότητας. Δίνονται: $R = 10\,\Omega,\, L = 23\,m\mathrm{H}$.

Λύση

Αν ονομάσουμε X_L την επαγωγική αντίσταση, τότε ισχύουν:

$$10 + jX_L = Z\angle 65^\circ\,,\; X_L = 10\tan(65^\circ) = 21.45\Omega$$

Επίσης, είναι:

$$X_L = \omega L \Rightarrow \omega = \frac{21.45}{23\times 10^{-3}} = 932.61\,rads^{-1}$$

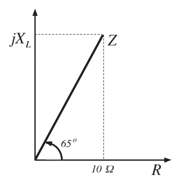
και η πηγή συχνότητας προκύπτει ότι είναι:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 148.43\mathrm{H}z$$

Η σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος υπολογίζεται:

$$Z = 10 + j21.45\,(\Omega)$$

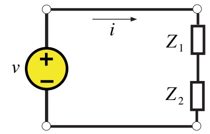
Το διάγραμμα που αποδίδει τη σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος φαίνεται στο Σχ. 26-1.



Σχήμα 26-1. Η σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος της άσκησης 26. ■

Άσκηση 27

Για το κύκλωμα του Σχ. 27-1 να υπολογισθούν η ισοδύναμη αντίσταση και το ρεύμα. Δίνονται: $Z_1 = 16\angle 0^\circ\,\Omega, Z_2 = 5.5\angle 17^\circ\,\Omega, v = 120\angle 0^\circ\,V$.



Σχήμα 27-1. Το κύκλωμα της άσκησης 27.

Λύση

Η ισοδύναμη αντίσταση του κυκλώματος είναι:

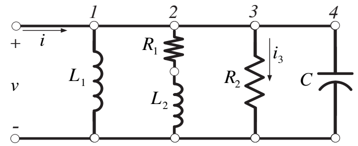
$$\begin{aligned} Z_{\iota\sigma} &= Z_1 + Z_2 = 16\angle 0^\circ + 5.5\angle 17^\circ \\ &= 21.26 + j1.61\,(\Omega) \\ &= 21.32\angle 4.33^\circ\,(\Omega) \end{aligned}$$

Το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα είναι:

$$i = \frac{V}{Z_{\iota\sigma}} = \frac{120\angle 0^\circ}{21.32\angle 4.33^\circ} = 5.63\angle -4.33^\circ\,(A)$$ ■

Άσκηση 28

Να υπολογισθούν η ισοδύναμη σύνθετη αντίσταση και αγωγιμότητα για το τεσσάρων κλάδων κύκλωμα που εικονίζεται στο Σχ. 28-1. Δίνονται: $Z_{L_1} = j10\,\Omega, Z_{L_2} = j23\,\Omega\,, Z_{R_1} = 7.3\,\Omega, Z_{R_2} = 14.4\,\Omega, Z_C = -7j\,\Omega$.



Σχήμα 28-1. Το κύκλωμα της άσκησης 28.

Λύση

Οι αγωγιμότητες για κάθε ένα κλάδο είναι:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Y}_1 = \frac{1}{j10} = -0.1jS, \quad \mathrm{Y}_2 = \frac{1}{7.3 + j23} = 0.013 - j0.04S, \\ &\mathrm{Y}_3 = \frac{1}{14.4} = 0.07jS, \quad \mathrm{Y}_4 = \frac{1}{-j7} = j0.14S \end{aligned}$$

Η ισοδύναμη αγωγιμότητα του κυκλώματος είναι:

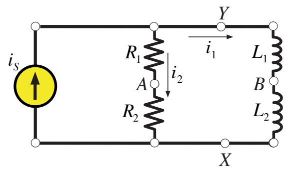
$$\mathrm{Y}_{\iota\sigma} = \sum_{k=1}^{4}\mathrm{Y}_k = \mathrm{Y}_1 + \mathrm{Y}_2 + \mathrm{Y}_3 + \mathrm{Y}_4 = -0.017 + 0.1jS = 0.1\angle -80.35^\circ\,S$$

και η ισοδύναμη σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος είναι:

$$Z_{\iota\sigma} = \frac{1}{\mathrm{Y}_{\iota\sigma}} = -1.65 - j9.72\Omega = 9.86\angle 80.35^\circ\,\Omega \qquad \blacksquare$$

Άσκηση 29

Να προσδιορισθεί η φασική τάση v_{AB} στο κύκλωμα που εικονίζεται στο Σχ. 29-1. Δίνονται: $Z_{R_1} = 10\Omega,\, Z_{R_2} = 20\Omega,\, Z_{L_1} = j2\Omega,\, Z_{L_2} = j6\Omega$. Η πηγή ρεύματος είναι: $i_s = 18\angle 45^\circ$.



Σχήμα 29-1. Το κύκλωμα της άσκησης 29.

Λύση

Με βάση το νόμο ρευμάτων του Kirchoff, τα ρεύματα του κυκλώματος υπολογίζονται ότι είναι:

$$i_1 = 4.64\angle 120.1^\circ\,A,\; i_2 = 17.4\angle 30.1^\circ\,A$$

Και η ζητούμενη τάση v_{AB} είναι:

$$\begin{aligned} v_{AB} &= v_{AX} + v_{XB} = i_{i1}(20) - i_2(j6) = \\ &= 92.8\angle 120.1^\circ + 104.4\angle -59.9^\circ = 11.6\angle -59.9^\circ\,V \end{aligned} \qquad \blacksquare$$

Άσκηση 30

Μία τάση $5\,V$ εναλλασσόμενου ρεύματος τροφοδοτεί: (α) έναν αντιστάτη 5Ω, (β) ένα φορτίο με $Z = 5 + j$ και (γ) ένα φορτίο με $Z = 2 - j3$. Να υπολογισθεί η ισχύς σε κάθε μία από τις τρεις περιπτώσεις.

Λύση

Η ισχύς σε κάθε μία από τις τρεις περιπτώσεις υπολογίζεται:

(α) $P = \frac{V^2}{R} = \frac{25}{5} = 5\,W$.

(β) Είναι

$$\|Z\| = \|5 + j\| = \sqrt{5^2 + 1} = \sqrt{26}$$

και

$$P = \frac{V^2}{\|Z\|}\cos(11.31) = \frac{25}{\sqrt{26}}0.98 = 4.8\,W.$$

(γ) Είναι

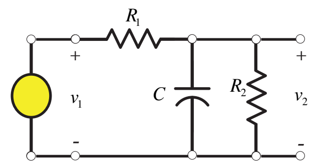
$$\|Z\| = \|2 - j3\| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

και

$$P = \frac{V^2}{\|Z\|}\cos(-56.31) = \frac{25}{\sqrt{13}}0.55 = 3.85\,W. \qquad \blacksquare$$

Άσκηση 31

Να υπολογισθεί η συνάρτηση μεταφοράς v_2 / v_1 στο κύκλωμα του Σχ. 31-1 με χρήση σύνθετων αντιστάσεων. Δίνονται: $R_1 = 10k\Omega,\, R_2 = 900\Omega,\, C = 2\mu F$.



Σχήμα 31-1. Το κύκλωμα της άσκησης 31.

Λύση

Έστω Y_{RC} η είσοδος του κυκλώματος. Τότε, θα είναι:

$$\mathrm{Y}_{RC} = 2\times 10^3 j\omega + \frac{1}{900}$$

Η συνάρτηση μεταφοράς του κυκλώματος $\mathrm{H}(j\omega)$ είναι ο λόγος v_2 / v_1:

$$\mathbf{H}(j\omega) = \frac{v_2}{v_1} = \frac{Z_{RC}}{Z_{RC} + 10\times 10^3} = \frac{\frac{1}{\mathrm{Y}_{RC}}}{\frac{1}{\mathrm{Y}_{RC}} + 10^4} = \frac{1}{2\times 10^{-2} j\omega + 12.11}$$

ή

$$\mathbf{H}(j\omega) = \|\mathbf{H}(j\omega)\| e^{j\theta}$$

με:

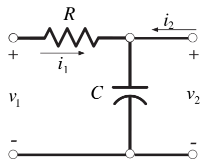
$$\|\mathbf{H}(j\omega)\| = \frac{1}{\sqrt{4\times 10^{-4}\omega^2 + 146.65}}$$

και

$$\theta = \tan^{-1}(\frac{2\times10^{-2}\omega}{12.11}) = \tan^{-1}(1.65\times10^{-3}\omega) \quad \blacksquare$$

Άσκηση 32

Να υπολογισθεί η συνάρτηση μεταφοράς τάσης $H(j\omega)$ για το ανοικτό κύκλωμα του Σχ. 32-1. Σε τι συχνότητα, σε Hz, είναι $\|H(j\omega)\| = 1/\sqrt{2}$ αν η χωρητικότητα του πυκνωτή είναι (α) $C = 10nF$, (β) $C = 1nF$; Δίνονται: $R = 5k\Omega, I_2 = 0.$



Σχήμα 32-1. Το ανοικτό κύκλωμα της άσκησης 32.

Λύση

Η συνάρτηση μεταφοράς δίνεται από τη σχέση:

$$H(j\omega) = \frac{1/j\omega C}{R + 1/j\omega C} = \frac{1}{1 + j(\omega/\omega_x)} \; (1),$$

όπου

$$\omega_x \equiv \frac{1}{RC} = \frac{2\times10^{-4}}{C}(rads^{-1}) \; (2).$$

Το μέτρο της $H(j\omega)$ βρίσκεται από τη σχέση (1) και είναι:

$$\|H(j\omega)\| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_x)^2}} \; (3).$$

(α) Για $C = 10nF$ και $\|H(j\omega)\| = 1/\sqrt{2}$ συνδυάζοντας τις (2), (3) παίρνουμε:

$$\omega_x = \omega = \frac{2\times10^{-4}}{10\times10^{-9}} = 2\times10^4 \, rad/s$$

και άρα η ζητούμενη συχνότητα είναι:

$$f = \frac{2\times10^{-4}}{2\pi} = 3.18kHz$$

(β) Με τον ίδιο τρόπο η συχνότητα για $C = 1nF$ και $\|H(j\omega)\| = 1/\sqrt{2}$ βρίσκεται:

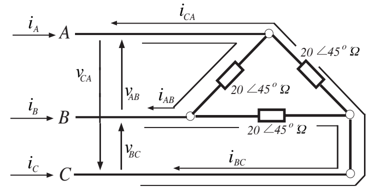
$$f = 31.8kHz$$

Σημείωση: συγκρίνοντας τα (α) και (β) είναι φανερό ότι όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή του πυκνωτή, τόσο μικρότερη είναι η συχνότητα, στην οποία η $H(j\omega)$ πέφτει στο $1/\sqrt{2}$ της μέγιστης τιμής της. Συνεπώς, οποιαδήποτε παρασιτική παράλληλη χωρητικότητα προς τη C βοηθάει στο να μειώσουμε την απόκριση του κυκλώματος, αφού η ολική χωρητικότητα αυξάνεται. $\blacksquare$

Άσκηση 33

Ένα τριφασικό ευθύ σύστημα A,B,C, με ενδεικνύμενη τάση $70.7V$ συνδέεται με ένα συμμετρικό σύστημα φορτίων συνδεδεμένων κατά τρίγωνο, με ολική σύνθετη αντίσταση $20\angle45^\circ$. Να προσδιορισθούν τα πλάτη των ρευμάτων γραμμής και να σχεδιασθεί το διανυσματικό διάγραμμα εντάσεων – τάσεων.

Λύση



Σχήμα 33-1. Σύνδεση τριφασικού συστήματος με συμμετρικό σύστημα φορτίων συνδεδεμένων κατά τρίγωνο.

Στο Σχ. 33-1 φαίνονται οι τάσεις των φάσεων, οι οποίες έχουν μέγιστες τιμές: $20\angle45^\circ$. Οι φασικές γωνίες λαμβάνονται από το ευθύ σύστημα τριγώνου. Τα φασικά ρεύματα είναι:

$$i_{AB} = \frac{v_{AB}}{Z} = \frac{100\angle120^\circ}{20\angle45^\circ} = 5\angle75^\circ A$$

και ομοίως,

$$i_{BC} = 5\angle-45^\circ A, \; i_{CA} = 5\angle195^\circ A$$

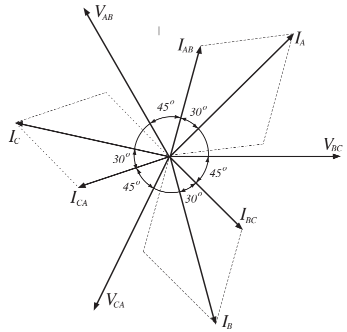
Τα ρεύματα γραμμής υπολογίζονται:

$$i_A = i_{AB} + i_{AC} = 5\angle75^\circ - 5\angle195^\circ A = 8.65\angle45^\circ$$

και ομοίως,

$$i_B = 8.65\angle-75^\circ A, \; i_C = 8.65\angle165^\circ A$$

Το διάγραμμα εντάσεων – τάσεων φαίνεται στο Σχ. 33-2.

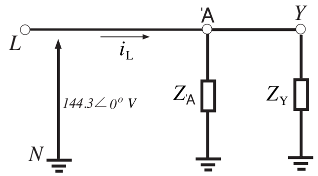


Σχήμα 33-2. Το διάγραμμα εντάσεων – τάσεων της άσκησης 33. ■

Άσκηση 34

Ένα τριφασικό σύστημα τριών αγωγών, με ενδεικνύμενη τιμή πολικής τάσης $V_L = 249,9V$ τροφοδοτεί δύο συμμετρικά φορτία, το ένα σε διάταξη τρίγωνο, με σύνθετη αντίσταση $Z_\Delta = 15\angle 0^\circ\,\Omega$ και το άλλο σε διάταξη αστέρα, με σύνθετη αντίσταση $Z_Y = 10\angle 30^\circ\,\Omega$. Να υπολογισθεί η συνολική ισχύς.

Λύση



Σχήμα 34-1. Σύνδεση τριφασικού συστήματος με τα συμμετρικά φορτία της άσκησης 34.

Αρχικά, μετατρέπουμε το φορτίο διάταξης τριγώνου σε φορτίο διάταξης αστέρα και στη συνέχεια χρησιμοποιούμε το ισοδύναμο μονοφασικό κύκλωμα του Σχ. 34-1 για να υπολογισθεί το ρεύμα γραμμής. Πράγματι:

$$\mathbf{I}_L = \frac{144,3\angle 0^\circ}{5\angle 0^\circ} + \frac{144,3\angle 0^\circ}{10\angle 30^\circ} = 42\angle -9,9^\circ\,A$$

Έτσι, η ολική ισχύς είναι:

$$P = \sqrt{3} V_L I_L \cos\theta = \sqrt{3}(249,9)(42)\cos(9,9^\circ) = 17,91\,kW\,.$$ ■

Άσκηση 35

Ένα τριφασικό δίκτυο με τρεις αγωγούς φάσης C, B, A, με ενδεικνύμενη τάση γραμμής $200\mathrm{V}$ τροφοδοτεί συμμετρικό φορτίο σε σύνδεση τριγώνου με σύνθετη αντίσταση $15\angle 30^\circ\,\Omega$. Προσδιορίστε τα ρεύματα γραμμής και φάσης με τη μέθοδο της ισοδύναμου απλής γραμμής.

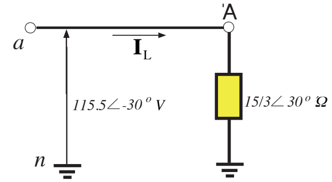
Λύση

Το Σχ. 35-1 απεικονίζει την ισοδύναμη απλή γραμμή. Υποθέτοντας ότι η τάση γραμμής είναι $\mathbf{V}_{AB} = V_\phi\angle 0^\circ$, η ισοδύναμη τάση μεταξύ γραμμής και ουδετέρου είναι

$$\mathbf{V}_{an} = \frac{200}{\sqrt{3}}\angle -30^\circ = 115,5\angle -30^\circ V\,.$$

Το ρεύμα γραμμής από το ισοδύναμο μονοφασικό κύκλωμα είναι

$$\mathbf{I}_L = \frac{115,5\angle -30^\circ}{(15/3)\angle 30^\circ} = 23,1\angle -60^\circ\,A\,.$$



Σχήμα 35-1. Σύνδεση τριφασικού συστήματος με το φορτίο της άσκησης 35.

Επομένως, τα ρεύματα γραμμής του ευθέος συστήματος A, B, C είναι

$$\mathbf{I}_{aA} = 23,1\angle -60^\circ A,\ \mathbf{I}_{bB} = 23,1\angle -180^\circ A,\ \mathbf{I}_{cC} = 23,1\angle -300^\circ A\,.$$

Επειδή δε

$$\mathbf{I}_{aA} = 23,1\angle -60^\circ A = \sqrt{3} I_\phi\angle -\theta - 30^\circ \Rightarrow I_\phi = 13,34A,\ \theta = 30^\circ$$

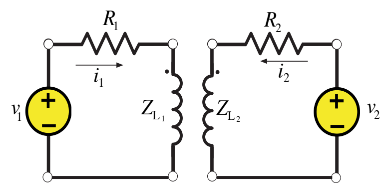
τα ρεύματα φάσης του ευθέος συστήματος A, B, C είναι

$$\mathbf{I}_{AB} = 13,34\angle -30^\circ A,\ \mathbf{I}_{BC} = 13,34\angle -150^\circ A,\ \mathbf{I}_{CA} = 13,34\angle -270^\circ A\,.$$

Το πρόβλημα αυτό μπορεί να επιλυθεί απλούστερα με εφαρμογή του Πίνακα 7-2. ■

Άσκηση 36

Για το μετασχηματιστή του Σχ. 36-1 να υπολογισθεί ο λόγος v_2 / v_1, για τον οποίο το ρεύμα i_1 είναι μηδέν. Δίνονται: $R_1 = 3\Omega, R_2 = 6\Omega, Z_{L_1} = j10\Omega$, $Z_{L_2} = j3\Omega\,, j\omega M = j5\Omega$.



Σχήμα 36-1. Το κύκλωμα της άσκησης 36.

Λύση

Σε μητρωική μορφή οι νόμοι που ισχύουν για το συγκεκριμένο κύκλωμα γράφονται:

$$\begin{bmatrix} R_1 + Z_{L_1} & j5 \\ j5 & R_2 + Z_{L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

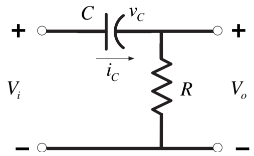
Για $i_1 = 0$, η (1) γίνεται:

$$\left.\begin{aligned} j5 &= v_1 \\ (R_2 + Z_{L_2}) i_2 &= v_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{R_2 + Z_{L_2}}{j5} \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{6+j3}{j5}.$$

■

Άσκηση 37

Ένα φίλτρο έχει την κυκλωματική μορφή που απεικονίζεται στο Σχ. 37-1. (α) Εξετάστε τη συμπεριφορά του σε πολύ χαμηλές και πολύ υψηλές συχνότητες. Τι είδους φίλτρο νομίζετε ότι είναι; (β) Σχεδιάστε τα διαγράμματα Bode του φίλτρου. R = 10MΩ, C = 1μF.



Σχήμα 37-1. Φίλτρο7.

Λύση

(α) Ο πυκνωτής έχει σύνθετη αντίσταση

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C}$$

Σε πολύ χαμηλές συχνότητες, η σύνθετη αντίσταση είναι άπειρη, άρα ο πυκνωτής συμπεριφέρεται σαν ανοικτοκύκλωμα. Επομένως, σήματα που έχουν χαμηλές συχνότητες δεν περνούν από αυτόν και κατ' επέκταση από το κύκλωμα - φίλτρο.

Σε πολύ υψηλές συχνότητες, ο πυκνωτής έχει μηδενική σύνθετη αντίσταση, συμπεριφέρεται δηλαδή σαν βραχυκύκλωμα. Στην περίπτωση αυτή, η τάση εισόδου (μέτρο, φάση) είναι ίση με την τάση εξόδου και άρα οι υψηλές συχνότητες περνούν από το φίλτρο.

Αυτές οι παρατηρήσεις και το γεγονός ότι το φίλτρο είναι 1ης τάξης (αποτελείται από ένα δυναμικό στοιχείο, τον πυκνωτή) μας οδηγούν στο συμπέρασμα ότι πρόκειται για ένα υψιπερατό φίλτρο.

(β) Η συνάρτηση μεταφοράς μπορεί να βρεθεί με πολλούς τρόπους. Ο ευκολότερος εδώ είναι να βρεθεί με διαίρεση τάσης και σύνθετες αντιστάσεις. Πράγματι, έχουμε

$$V_o = \frac{Z_R}{Z_R + Z_R} V_i \Rightarrow H(j\omega) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{Z_R}{Z_R + Z_R} \Rightarrow$$

$$H(j\omega) = \frac{R}{\dfrac{1}{j\omega C} + R} = \frac{j\omega RC}{j\omega RC + 1}$$

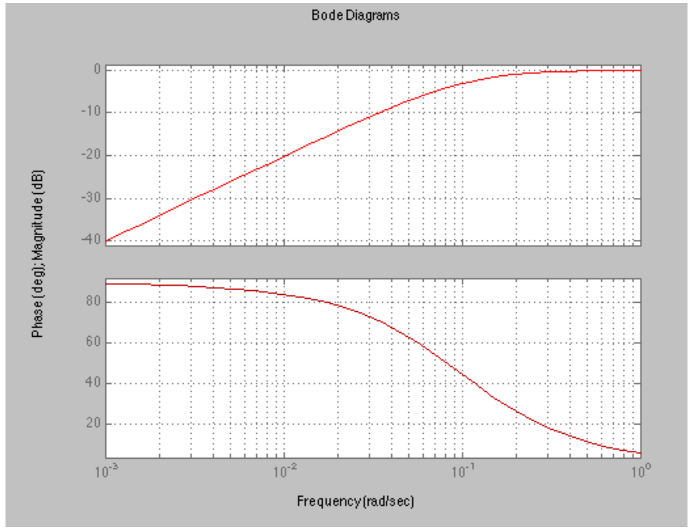
Με αντικατάσταση των αριθμητικών τιμών, έχουμε

$$H(j\omega) = \frac{10 j\omega}{10 j\omega + 1}$$

Η χάραξη των διαγραμμάτων Bode γίνεται με την παρατήρηση ότι έχουμε την επαλληλία τριών στοιχειωδών όρων: (α) Κέρδους 10, (β) όρου s, (γ) όρου 1/(10s+1).

$$H(s) = \frac{10s}{10s+1} = 10 \cdot s \cdot \frac{1}{10s+1}$$

Το αποτέλεσμα είναι το εξής



Σχήμα 37-2. Bode.

Επειδή οι συχνότητες κάτω από 0,1 rad/s αποκόπτονται, πράγματι πρόκειται για ένα υψιπερατό φίλτρο.

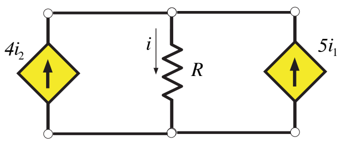
Επιβεβαιώστε τις κλίσεις και τις συχνότητες θλάσης κάθε στοιχειώδους όρου. ■

Μέρος 2

Άλυτες Ασκήσεις

Άσκηση 1

Στο κύκλωμα του Σχ. 1-1 να υπολογισθεί το ρεύμα i, για τις εξής περιπτώσεις: (α) $i_1 = 2A, i_2 = 0$, (β) $i_1 = -1A, i_2 = 4A$, (γ) $i_1 = i_2 = 1A$.

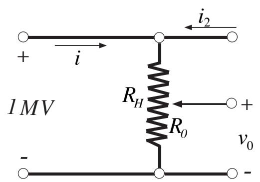


Σχήμα 1-1. Το κύκλωμα της άσκησης 1.

(Απ. (α) $10\,A$, (β) $11\,A$, (γ) $9\,A$). ■

Άσκηση 2

Να υπολογισθούν τα R_H, R_0 (βλ. Σχ. 2-1) στο διαιρέτη τάσης έτσι ώστε το ρεύμα i να είναι $0.5\,A$, όταν η τάση v_0 είναι $100\,V$.

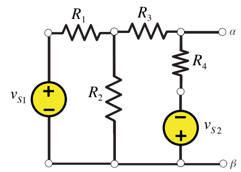


Σχήμα 2-1. Ο διαιρέτης τάσης της άσκησης 2.

(Απ. $R_H = 2\mathrm{M}\Omega,\ R_0 = 200\,\Omega$). ■

Άσκηση 3

Να προσδιορισθούν η τάση και το ρεύμα μεταξύ των ακροδεκτών α, β (βλ. Σχ. 3-1) με τη μέθοδο της τάσης. Να θεωρηθεί ότι ο ακροδέκτης α είναι θετικός. Δίνονται: $R_1 = 4\Omega, R_2 = 2\Omega, R_3 = 5\Omega, R_4 = 2\Omega, v_{s1} = 50\,V, v_{s2} = 20\,V$.

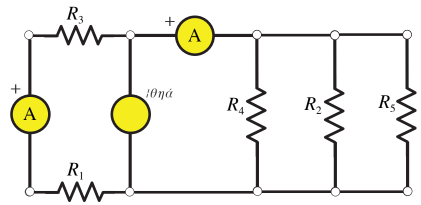


Σχήμα 3-1. Το κύκλωμα της άσκησης 3.

(Απ. $-11.2\,V,\ -7.37\,A$). ■

Άσκηση 4

Να προσδιορισθούν οι αντιστάσεις R_1, R_2, εάν η κάθε μία από τις πηγές ρεύματος είναι $1.70\,A$ και η πηγή ενέργειας είναι $300\,W$ (βλ. Σχ. 4-1). Δίνονται: $R_3 = 28\Omega, R_4 = 95\Omega, R_5 = 154.3\Omega$.

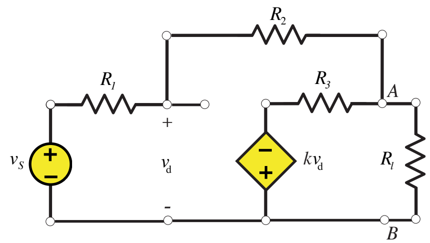


Σχήμα 4-1. Το κύκλωμα της άσκησης 4.

(Απ. $23.9\Omega,\ 443\Omega$). ■

Άσκηση 5

Να βρεθεί το ισοδύναμο κύκλωμα Thevenin για το κύκλωμα που εικονίζεται στο Σχ. 5-1, για (α) $R_2 = \infty$ και (β) $R_2 = 50\,k\Omega$. $R_1 = 10\,k\Omega, R_3 = 100\Omega, v_s = 10\,V$ και $k = 10$.

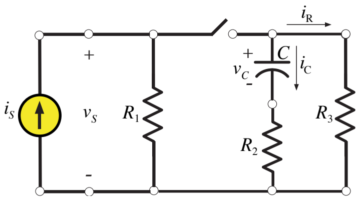


Σχήμα 5-1. Το κύκλωμα της άσκησης 5.

(Απ. (α) $v_{Th} = -100\,V, R_{Th} = 100\Omega$, (β) $v_{Th} = -32.22\,V, R_{Th} = 37.48\Omega$). ■

Άσκηση 6

Να υπολογισθούν τα i_R, i_C, v_C, v_S (βλ. Σχ. 6-1), εάν ο διακόπτης του κυκλώματος ανοίγει τη στιγμή $t = 0$. Δίνονται: $R_1 = 4\,k\Omega, R_2 = 3\,k\Omega, R_3 = 2\,k\Omega$ καθώς και $C = 2\,\mu F, i_s = 6\,mA$.

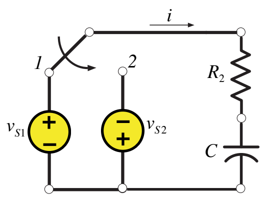


Σχήμα 6-1. Το κύκλωμα της άσκησης 6.

(Απ. $i_R = 1.6e^{-100t}(mA), i_S = 0, v_C = 8e^{-100t}(V), v_S = 24\ V$). ■

Άσκηση 7

Στο κύκλωμα του Σχ. 7-1 ο διακόπτης είναι κλειστός στη θέση 7-1 τη στιγμή $t = 0$ και μετακινείται στη θέση 2 μετά από μία σταθερά χρόνου. Να προσδιορισθεί το ρεύμα για (α) $0 < t < \tau$, (β) $t > \tau$. Δίνονται: $v_{s1} = 50\ V,\ v_{s2} = 20\ V$ και $R = 100\Omega,\ C = 50\mu F$.

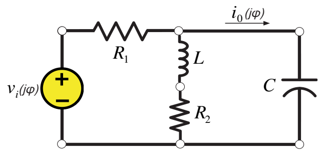


Σχήμα 7-1. Το κύκλωμα της άσκησης 7.

(Απ. (α) $0.5e^{-200t}(A)$, (β) $-0.516e^{-200(t-\tau)}(A)$). ■

Άσκηση 8

Η πηγή τάσης του κυκλώματος του Σχ. 8-1 έχει τη μορφή: $v_i(t) = 10e^{-t}\cos(2t)\ V$. Να προσδιορισθεί το ρεύμα $i_0(t)$. Δίνονται: $R_1 = 1\Omega, R_2 = 2\Omega$ καθώς και $Z_C = 4 / j\omega(\Omega),\ Z_L = 2j\omega(\Omega)$.



Σχήμα 8-1. Το κύκλωμα της άσκησης 8.

(Απ. $7.07e^{-t}\cos(2t + 98.13^\circ)(A)$). ■

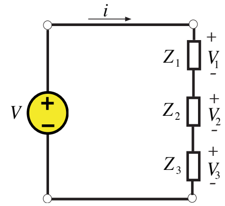
Άσκηση 9

Ένα κύκλωμα RLC, σε σειρά με $R = 15\Omega,\ L = 80\,m\mathrm{H},\ C = 30\mu F$ έχει γωνιακή συχνότητα $500\,rad / s$. Να υπολογισθεί η φάση του κυκλώματος και να προσδιορισθεί αν το ρεύμα προηγείται ή καθυστερεί της ολικής τάσης.

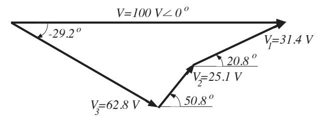
(Απ. 60.6° , προηγείται). ■

Άσκηση 10

Να υπολογισθούν, για το κύκλωμα του Σχ. 10-1, το οποίο περιέχει τρία στοιχεία σε σειρά: (α) το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα, (β) η τάση σε κάθε σύνθετη αντίσταση και να σχεδιαστεί το διάγραμμα φάσεων των τάσεων, το οποίο θα δείχνει ότι ισχύει: $V_1 + V_2 + V_3 = 100\angle 0^\circ$. Δίνονται: $Z_1 = 5\angle 30^\circ\,\Omega,\ Z_2 = 4\angle 60^\circ\,\Omega,\ Z_3 = 10\angle -20^\circ\,\Omega$.



Σχήμα 10-1. Το κύκλωμα της άσκησης 10.

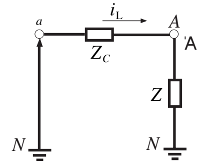


Σχήμα 10-2. Μέρος της λύσης της άσκησης 10.

(Απ. (α) $6.28\angle -9.17^\circ$, (β) βλ. Σχ. 10-2). ■

Άσκηση 11

Ένα συμμετρικό φορτίο σε σύνδεση τριγώνου, με σύνθετη αντίσταση $Z = 30\angle 30^\circ$ είναι συνδεδεμένο με ένα τριφασικό, τριών αγωγών, των $250\,V$, σύστημα με αγωγούς, οι οποίοι έχουν σύνθετη αντίσταση $Z_C = 0.4 + j0.3\Omega$ (βλ. Σχ. 11-1). Να προσδιορισθεί η τάση από γραμμή σε γραμμή.

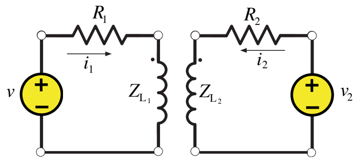


Σχήμα 11-1. Σύνδεση συμμετρικού φορτίου με τριφασικό σύστημα.

(Απ. $137.4\angle -0.33^\circ\ V$). ■

Άσκηση 12

Στο μετασχηματιστή που εικονίζεται στο Σχ. 12-1 να προσδιορισθεί η πηγή τάσης v_2 για $i_1 = 0$. Ποια θα είναι η πηγή τάσης v_2, εάν τοποθετηθεί αντιστάτης 8Ω κάτω από αυτές τις συνθήκες; Δίνονται: $R_1 = 5\Omega, R_2 = 2\Omega, -j\omega M = j2\Omega$ καθώς και $Z_{L_1} = j8\Omega, Z_{L_2} = j2\Omega, v = 100\angle 0^\circ$.

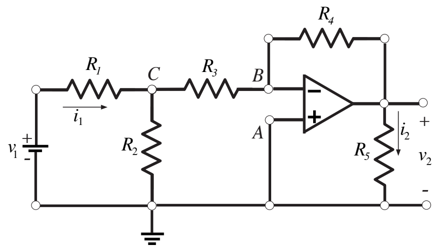


Σχήμα 12-1. Το κύκλωμα της άσκησης 12.

(Απ. $141.4\angle -45^\circ\ V, 100\angle 0^\circ\ V$). ■

Άσκηση 13

Στο κύκλωμα του Σχ. 13-1 να υπολογισθούν τα i_1, v_2, i_2, R , όπου R είναι η αντίσταση με τάση v_1. Δίνονται: $R_1 = 4\Omega, R_2 = 6\Omega, R_3 = 3\Omega, R_4 = 4\Omega, R_5 = 10\Omega, v_1 = 9\,V$.

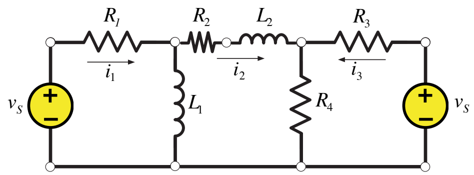


Σχήμα 13-1. Το κύκλωμα της άσκησης 13.

(Απ. $1.5\,A, -5\,V, -0.5\,A, 6\Omega$). ■

Άσκηση 14

Να προσδιορισθεί η τάση v του Σχ. 14-1 με τη μέθοδο των τάσεων, υποθέτοντας ότι το ρεύμα που διαρρέει την αντίσταση R_2 είναι μηδέν. Δίνονται: $Z_{L_1} = j5\Omega, v_1 = v_2 = 30\angle 0^\circ\ V, Z_{L_2,R_2} = 2 + j3\Omega$ και $Z_{R_1} = 5\Omega, Z_{R_3} = 4\Omega, Z_{R_4} = 6\Omega$.



Σχήμα 14-1. Το κύκλωμα της άσκησης 14.

(Απ. $35.4\angle 90^\circ\ V$). ■