# Εισαγωγή στους Μιγαδικούς Αριθμούς

## 1. Εισαγωγή

Η επινόηση των μιγαδικών αριθμών (16ος αι.) επιτεύχθηκε όταν παρουσιάστηκε η ανάγκη επίλυσης της εξίσωσης,

$$x^2 = a\,, \quad a < 0 \tag{1}$$

Η εξίσωση αυτή στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ δεν έχει λύση και η ατέλεια αυτή θεραπεύθηκε από ένα άλλο σύνολο, το σύνολο των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$.

Ετυμολογικά, μιγαδικός σημαίνει μικτός, δηλ. αριθμός ο οποίος αποτελείται από ένα πραγματικό και ένα φανταστικό μέρος. Αξιωματικά, το σύνολο των μιγαδικών αριθμών ορίζεται ως,

$$\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 = \{(a,b) : a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}\} \tag{2}$$

δηλαδή, κάθε στοιχείο του $\mathbb{C}$ είναι ένα *διατεταγμένο ζεύγος* πραγματικών αριθμών. Συνεπώς, αν $z \in \mathbb{C}$, θα είναι,

$$\mathbf{z} = (a,b)\,, \quad a,b \in \mathbb{R} \tag{3}$$

Έτσι, οι μιγαδικοί αριθμοί παρουσιάζουν το πλεονέκτημα ότι μπορούν να παριστούν δύο ποσότητες με ενοποιημένο τρόπο και γι' αυτό χρησιμοποιούνται σε πολλές εφαρμογές. Κάθε μιγαδικός αριθμός μπορεί να αποδοθεί με τρεις διαφορετικούς τρόπους. Ανάλογα με την περίσταση επιλέγεται ο καταλληλότερος από τους τρεις, ώστε να επιλυθεί κάποιο πρόβλημα. Οι μορφές που απαντώνται οι μιγαδικοί είναι η *Καρτεσιανή*, η *πολική* και η *εκθετική* μορφή. Στη συνέχεια, αναλύονται οι μορφές αυτές παρουσιάζοντας τα βασικότερα χαρακτηριστικά τους.

## 2. Ορθογώνια ή Καρτεσιανή μορφή

Ένας μιγαδικός αριθμός μπορεί να παραστεί ως το άθροισμα ενός πραγματικού και ενός φανταστικού αριθμού και αποδίδεται ως,

$$\mathbf{c} = a + jb\,, \quad a,b \in \mathbb{R} \tag{4}$$

όπου,

$$j = \sqrt{-1} \tag{5}$$

είναι η φανταστική μονάδα. Η Εξ. (5) μπορεί να γραφεί και ως,

$$j^2 = -1 \tag{6}$$

Οι πραγματικοί αριθμοί $a$ και $b$ ανακτώνται από το μιγαδικό αριθμό ως εξής,

$$a = \mathrm{Re}(\mathbf{c}) \tag{7α}$$

$$b = \mathrm{Im}(\mathbf{c}) \tag{7β}$$

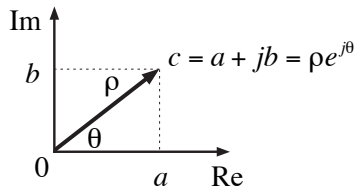
όπου το $\mathrm{Re}(c)$ είναι το **πραγματικό μέρος** (Real) και $\mathrm{Im}(c)$ είναι το **φανταστικό μέρος** (Imaginary) του μιγαδικού αριθμού $\mathbf{c}$.

Η μορφή του μιγαδικού αριθμού που δίνεται από την Εξ. (4) ονομάζεται **ορθογώνια** ή **Καρτεσιανή μορφή**.

# 3. Πολική μορφή

Ένας μιγαδικός αριθμός $\mathbf{c}$, βλ. Εξ. (4), μπορεί να παρασταθεί ως ένα σημείο στο μιγαδικό επίπεδο, δηλαδή ένα επίπεδο με τους πραγματικούς αριθμούς στον άξονα χ (τετμημένη) και τους φανταστικούς στον άξονα ψ (τεταγμένη), βλ. Σχ. 1. Στο σημείο αυτό του επιπέδου, μπορούμε να αντιστοιχίσουμε ένα διάνυσμα με μήκος ίσο με ρ

$$\rho = ||\mathbf{c}|| = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{8}$$




**Σχήμα 1.** Μιγαδικός αριθμός σε ορθογώνια και πολική μορφή.

Η Εξ. (8) δίδει το **μέτρο** του μιγαδικού αριθμού $\mathbf{c}$, $||\mathbf{c}||$. Το διάνυσμα σχηματίζει γωνία με τον πραγματικό άξονα ίση με,

$$\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a} \tag{9}$$

Επίσης ισχύουν,

$$a = \rho\cos\theta \tag{10α}$$

$$b = \rho\sin\theta \tag{10β}$$

Ο μιγαδικός αριθμός παρίσταται από το μήκος και τη γωνία του με την περιγραφική σχέση,

$$\mathbf{c} = \rho\measuredangle\theta \tag{11}$$

Η μορφή του μιγαδικού αριθμού που δίδεται από την Εξ. (11) λέγεται **πολική μορφή**, βλ. Σχ. 1. Το μήκος και η γωνία ανακτώνται από το μιγαδικό αριθμό με τις σχέσεις,

$$\rho = ||\mathbf{c}|| \tag{12α}$$

$$\theta = \arg(\mathbf{c}) \tag{12β}$$

όπου $\arg(\mathbf{c})$ ονομάζεται όρισμα (argument) του μιγαδικού αριθμού $\mathbf{c}$ και είναι η γωνία του διανύσματος με τον πραγματικό άξονα, βλ. Εξ. (9).

# 4. Εκθετική μορφή

Εάν γράψουμε ένα μιγαδικό αριθμό μέτρου 1 με την εξής μορφή,

$$\mathbf{c} = \cos\theta + j\sin\theta \tag{13}$$

και παραγωγίσουμε ως προς τη γωνία, λαμβάνουμε,

$$\frac{d\mathbf{c}}{d\theta} = j(\cos\theta + j\sin\theta) \Rightarrow \frac{d\mathbf{c}}{d\theta} = j\mathbf{c} \tag{14}$$

η οποία οδηγεί τελικά στην,

$$\frac{d\mathbf{c}}{d\theta} - j\mathbf{c} = 0 \tag{15}$$

Η τελευταία εξίσωση είναι μία διαφορική εξίσωση πρώτου βαθμού ως προς $\mathbf{c}$ και έχει λύση την **εκθετική συνάρτηση**, δηλαδή,

$$\mathbf{c} = e^{j\theta} \tag{16}$$

Επομένως μπορούμε να γράψουμε,

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta \tag{17}$$

και γενικότερα,

$$\rho e^{j\theta} = \rho(\cos\theta + j\sin\theta) \tag{18}$$

Η Εξ. (18) αποδεικνύει ότι κάθε μιγαδικός αριθμός μπορεί να παρασταθεί και σε **εκθετική μορφή**. Αυτή η μορφή είναι χρήσιμη γιατί αποτελεί μαθηματική έκφραση και όχι περιγραφική όπως η πολική μορφή της Εξ. (11).

Η Εξ. (17) οδηγεί στις εξισώσεις του Euler,

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta \tag{19α}$$

$$e^{-j\theta} = \cos\theta - j\sin\theta \tag{19β}$$

και τις αντίστροφές τους

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \tag{20α}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} \tag{20β}$$

# 5. Άλλες μορφές

Με χρήση των παραπάνω, πολλές φορές ένας μιγαδικός αριθμός $\mathbf{c}$ μπορεί να γραφεί και ως,

$$\mathbf{c} = \|\mathbf{c}\| e^{j\sphericalangle \mathbf{c}} = \rho e^{j\sphericalangle \mathbf{c}} \tag{21}$$

ή και,

$$a + jb = \sqrt{a^2 + b^2}\ e^{j\tan^{-1}(b/a)} \tag{22}$$

# 6. Πράξεις και ιδιότητες

## 6.1. Συζυγής

Ο **συζυγής** ενός μιγαδικού αριθμού,

$$\mathbf{c} = a + jb = \rho \sphericalangle \theta, \quad a, b \in \mathbb{R} \tag{23}$$

είναι ο

$$\mathbf{c}^* = a - jb = \rho \sphericalangle -\theta, \quad a, b \in \mathbb{R} \tag{24}$$

Ισχύει ότι

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{c}^* = (a + jb)(a - jb) = a^2 + b^2 = \rho^2 = \|\mathbf{c}\|^2 \tag{25}$$

## 6.2. Πρόσθεση & Αφαίρεση

Οι μιγαδικοί αριθμοί σε *Καρτεσιανή μορφή* προστίθενται (αφαιρούνται) σύμφωνα με τις σχέσεις,

$$(a_1 + jb_1) \pm (a_2 + jb_2) = (a_1 \pm a_2) + j(b_1 \pm b_2) \tag{26}$$

*Δηλ. το πραγματικό μέρος του αθροίσματος είναι ίσο με το άθροισμα των πραγματικών μερών ενώ το φανταστικό μέρος του αθροίσματος είναι ίσο με το άθροισμα των φανταστικών μερών.* Ανάλογα ισχύουν και για τη διαφορά μιγαδικών αριθμών.

Η πρόσθεση (αφαίρεση) σε *πολική μορφή* γίνεται διανυσματικά, δηλαδή με το *νόμο του παραλληλογράμμου*. Η αφαίρεση γίνεται ως πρόσθεση του αντίθετου διανύσματος.

Η πρόσθεση (αφαίρεση) σε *εκθετική μορφή* προϋποθέτει μετασχηματισμό σε μια από τις άλλες μορφή.

Συμπέρασμα: Για την *αναλυτική* πρόσθεση ή αφαίρεση μιγαδικών αριθμών σε εκθετική ή πολική μορφή, τους *μετατρέπουμε πρώτα σε Καρτεσιανή μορφή*.

## 6.3. Πολλαπλασιασμός & Διαίρεση

Ο πολλαπλασιασμός δύο μιγαδικών αριθμών σε *Καρτεσιανή μορφή* ορίζεται από τη σχέση

$$(a_1 + jb_1) \cdot (a_2 + jb_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + j(a_1 b_2 + b_1 a_2) \tag{27}$$

Που βέβαια είναι δύσκολο να το θυμάται κανείς.

Ο πολλαπλασιασμός δύο μιγαδικών αριθμών σε *πολική μορφή* είναι ευκολότερος και ορίζεται από τη σχέση,

$$(\rho_1 \measuredangle \theta_1) \cdot (\rho_2 \measuredangle \theta_2) = (\rho_1 \rho_2) \measuredangle (\theta_1 + \theta_2) \tag{28}$$

Επίσης, ο πολλαπλασιασμός δύο μιγαδικών αριθμών σε *εκθετική μορφή* είναι εύκολος

$$\rho_1 e^{j\theta_1} \cdot \rho_2 e^{j\theta_2} = (\rho_1 \cdot \rho_2) e^{j(\theta_1 + \theta_2)} \tag{29}$$

Η διαίρεση δύο μιγαδικών αριθμών ορίζεται για την *Καρτεσιανή μορφή* από την

$$\frac{a_1 + jb_1}{a_2 + jb_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + j \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} \tag{30}$$

Αυτό το αποτέλεσμα προκύπτει από πολλαπλασιασμό αριθμητή και παρανομαστή με τον συζυγή μιγαδικό του παρανομαστή, δηλ. με $a_2 - jb_2$. Πάντως, η μέθοδος αυτή είναι χρονοβόρα και μπορεί να οδηγήσει σε αλλεπάλληλα αριθμητικά λάθη. *Δηλαδή δεν συνιστάται.*

Η διαίρεση δύο μιγαδικών αριθμών ορίζεται για την *πολική μορφή* ορίζεται ως

$$\frac{\rho_1 \measuredangle \theta_1}{\rho_2 \measuredangle \theta_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \measuredangle (\theta_1 - \theta_2) \tag{31}$$

ενώ για την *μιγαδική μορφή* από την

$$\frac{\rho_1 e^{j\theta_1}}{\rho_2 e^{j\theta_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)} \tag{32}$$

Συμπέρασμα: Για τον *αναλυτικό* πολλαπλασιασμό ή διαίρεση μιγαδικών αριθμών σε *Καρτεσιανή μορφή*, τους *μετατρέπουμε πρώτα σε εκθετική ή πολική μορφή*.

Σημείωση: Στο Παράρτημα Β του βιβλίου μπορείτε να βρείτε συμπυκνωμένη πληροφορία για τους μιγαδικούς αριθμούς.

# 7. Αριθμητικά παραδείγματα

1. Να μετασχηματιστεί ο μιγαδικός $z = (2+3j)/(3-j)$ στη μορφή $a + jb$.

Λύση:

$$z = \frac{2+3j}{3-j} = \frac{(2+3j)(3+j)}{(3-j)(3+j)} = \frac{3+11j}{3^2+1^2} = \frac{3}{10} + j\frac{11}{10}$$

2. Εάν $z_1 = 9 - 3j$ και $z_2 = 10{,}2 - 18{,}4j$, να υπολογιστεί σε ορθογώνια και πολική μορφή ο μιγαδικός $z = \dfrac{z_1 z_2}{z_1 + z_2}$

Λύση:

Ορθογώνια μορφή:

$$z=\frac{z_1 z_2}{z_1+z_2}=\frac{(9-3j)(10,2-18,4j)}{(9-3j)+(10,2-18,4j)}=\frac{36,6-196,2j}{19,2-21,4j}=\frac{(36,6-196,2j)(19,2+21,4j)}{19,2^2+21,4^2}=\frac{4901,4-2983,8j}{826,6}$$

$$\Rightarrow z=5,93-3,61j$$

Πολική μορφή:

$$z=5,93-3,61j=\sqrt{5,93^2+3,61^2}\measuredangle\tan^{-1}(\frac{-3,61}{5,93})=6,94\measuredangle-31,33^{\circ}$$

Εναλλακτικά,

$$z=\frac{36,6-196,2j}{19,2-21,4j}=\frac{199,58\measuredangle-79,43^{\circ}}{28,75\measuredangle-48,1^{\circ}}=\frac{199,58}{28,75}\measuredangle(-79,43+48,1)^{\circ}=6,94\measuredangle-31,33^{\circ}$$

3. Να εκφραστεί το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του $z=a+jb$ συναρτήσει του $z$.

Λύση:

Είναι $z=a+jb$ και $z^*=a-jb$. Τότε,

$$z+z^*=2a\Rightarrow a=\frac{1}{2}(z+z^*)\Rightarrow \mathrm{Re}(z)=\frac{1}{2}(z+z^*)$$

και

$$z-z^*=2bj\Rightarrow b=\frac{1}{2j}(z-z^*)\Rightarrow \mathrm{Im}(z)=\frac{1}{2j}(z-z^*)=-\frac{1}{2}j(z-z^*)$$