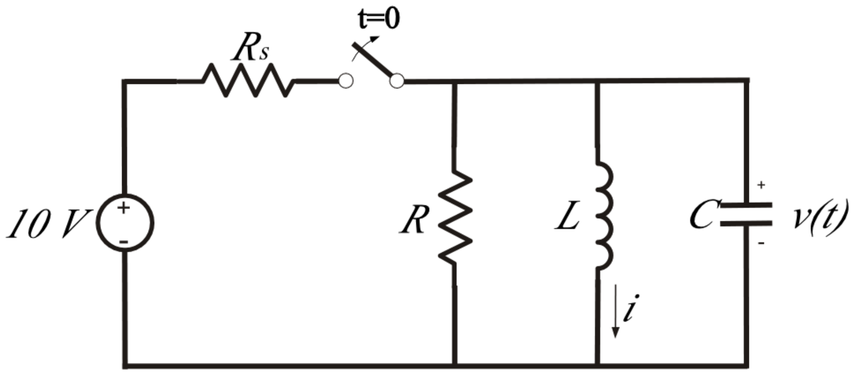
Άσκηση 2

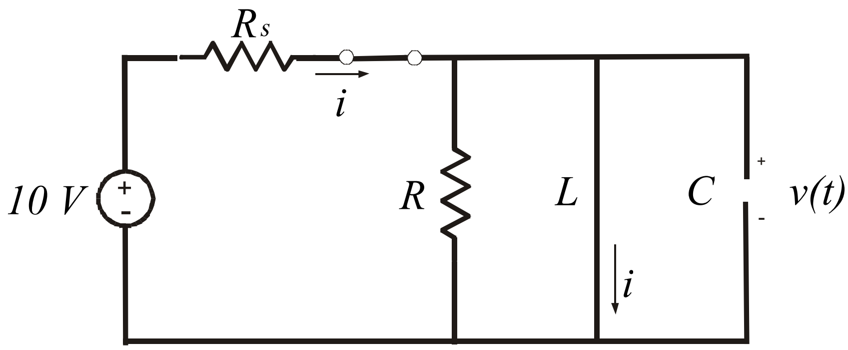
Ο διακόπτης στο κύκλωμα του Σχήματος 2-1, είναι κλειστός για μεγάλο χρονικό διάστημα, στα πλαίσια εργαστηριακού πειράματος. Ένας φοιτητής βλέποντας ότι η πηγή τάσης είναι μόνο 10 V, ακουμπά απρόσεκτα τα άκρα του πηνίου με τα δυο του χέρια, ακριβώς τη στιγμή που ο συνάδελφός του στο εργαστήριο ανοίγει το διακόπτη (t =0). Ποια η μέγιστη τάση στην οποία θα εκτεθεί; Σε ποια χρονική στιγμή θα συμβεί αυτό; Σχεδιάστε τη v(t). Δίνονται: V_s = 10 V, R_s = 1Ω, R = 500 Ω, L = 50/13 H., C = 100 μF.



Σχήμα 2-1 Το αρχικό κύκλωμα.

Λύση

Το ισοδύναμο κύκλωμα τη χρονική στιγμή 0^- (πριν το άνοιγμα του διακόπτη). Δίνεται στο Σχήμα 2-2. Το πηνίο θεωρείται βραχυκύκλωμα και ο πυκνωτής ανοιχτό κύκλωμα.



Σχήμα 2-2 Ισοδύναμο κύκλωμα, για $t=0^-$.

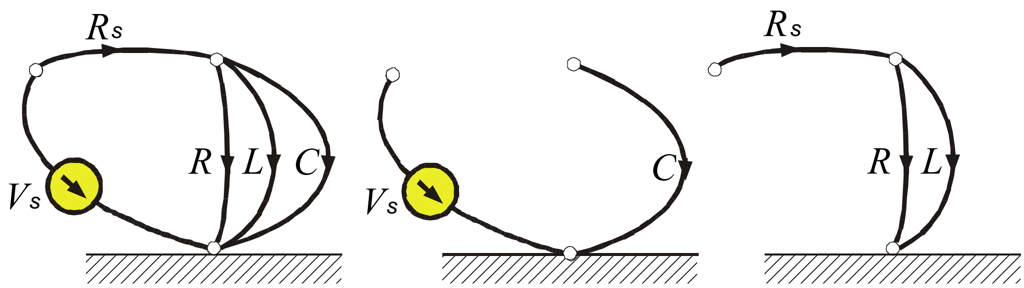
Απ' το παραπάνω κύκλωμα υπολογίζονται οι αρχικές συνθήκες.

$$10V = R_s i \Rightarrow i = \frac{10V}{1\Omega} \Rightarrow i_L(0) = 10A \quad (2\text{-}1)$$

$$v_C(0) = 0 \Leftrightarrow \left.\frac{di_L}{dt}\right|_0 = 0 \quad (2\text{-}2)$$

αφού $v_C = v_L = L\dfrac{di_L}{dt}$.

Στη γενική περίπτωση (με την πηγή συνδεδεμένη και το διακόπτη κλειστό), οι γράφοι του κυκλώματος δίνονται στο Σχήμα 2-3.



Σχήμα 2-3 Γράφος, Κανονικό Δένδρο, Δεσμοί.

NTK:

$$\begin{aligned}
&-v_S + v_{R_s} + v_C = 0 \Leftrightarrow v_{R_s} = v_S - v_C \\
&-v_L + v_C = 0 \Leftrightarrow v_L = v_C \\
&-v_R + v_C = 0 \Leftrightarrow v_R = v_C
\end{aligned} \tag{2-3}$$

NPK:

$$i_{R_s} - i_R - i_L - i_C = 0 \Leftrightarrow i_C = i_{R_s} - i_R - i_L \tag{2-4}$$

Τάξη=2

Μεταβλητές Κατάστασης (Μ.Κ.): v_C, i_L

Έξοδος: y= v_C

Απ΄ τις Εξ. (2-3) και (2-4), προκύπτουν οι εξισώσεις κατάστασης του κυκλώματος:

$$\begin{aligned}
\frac{dv_C}{dt} &= \frac{1}{C} i_C = \frac{1}{C}(i_{R_s} - i_R - i_L) = \frac{1}{C}\left(\frac{v_{R_s}}{R_s} - \frac{v_R}{R} - i_L\right) = \\
&= \frac{1}{C}\left(\frac{v_S - v_C}{R_s} - \frac{v_C}{R} - i_L\right)
\end{aligned}$$

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} v_L = \frac{1}{L} v_C$$

ή σε μορφή πινάκων:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dv_C}{dt} \\ \dfrac{di_L}{dt} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{R_s C} - \dfrac{1}{RC} & -\dfrac{1}{C} \\ \dfrac{1}{L} & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{R_s C} \\ 0 \end{bmatrix} v_S$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix}$$

Μας ενδιαφέρει η έξοδος του κυκλώματος (y(t) = v(t) = v_C(t)), για t > 0 (ανοιχτός διακόπτης). Σ΄ αυτή την περίπτωση, οι εξισώσεις κατάστασης προκύπτουν με ανάλογο τρόπο. Μπορούν να προκύψουν επίσης άμεσα απ' τις παραπάνω, θεωρώντας $\mathrm{R_s} \to \infty$, οπότε οι αντίστοιχοι πίνακες A, B, C, D, είναι:

$$A = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{RC} & -\dfrac{1}{C} \\ \dfrac{1}{L} & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{για } (t > 0) \tag{2-5}$$
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = [0]$$

Η ζητούμενη απόκριση μηδενικής εισόδου (ή ελεύθερη απόκριση), προκύπτει από επίλυση του συστήματος (2-5) με αρχικές συνθήκες που δίνονται απ' τις (2-1) και (2-2).

Στα επόμενα θα επιλύσουμε το πρόβλημα θεωρητικά, (λύνοντας τη Δ.Ε. 2^{ης} τάξης που περιγράφει το κύκλωμα), και ακολούθως θα χρησιμοποιήσουμε το MATLAB για να επαληθεύσουμε τα αποτελέσματα, χρησιμοποιώντας αυτή τη φορά ως μοντέλο του κυκλώματος την περιγραφή του μέσω των εξισώσεων κατάστασης (2-5).

Από την Εξ. (2-5)

$$\frac{dv_C}{dt} = -\frac{1}{RC}v_C - \frac{1}{C}i_L \tag{2-6}$$

είναι επίσης:

$$v_C = v_L = L\frac{di_L}{dt} \tag{2-7}$$

Από τις Εξ. (2-6) και (2-7), προκύπτει η Δ.Ε. (2^{ης} τάξης) του κυκλώματος:

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{di_L}{dt} + \frac{1}{LC}i_L = 0 \tag{2-8}$$

με αρχικές συνθήκες (2-1) και (2-2).

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο (Χ.Π.) της (2-8), είναι:

$$p(s) = s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC} = s^2 + (2\zeta\omega_n)\,s + \omega_n^2 \tag{2-9}$$

Το δεξί μέλος της (2-9) αποτελεί την τυπική μορφή του δευτεροβάθμιου πολυωνύμου p(s). Από την Εξ. (2-9):

$$\begin{aligned} \omega_n &= \sqrt{\frac{1}{LC}} \\ \zeta &= \frac{1}{2R}\sqrt{\frac{L}{C}} \end{aligned} \tag{2-10}$$

όπου ζ ο συντελεστής απόσβεσης και ω_n η φυσική συχνότητα (ή συχνότητα συντονισμού), η οποία είναι η συχνότητα ταλάντωσης για ζ=0. Για το δοσμένο κύκλωμα, ζ=0.196. Γενικά για 0<ζ<1, η (2-9) έχει δύο συζυγείς μιγαδικές ρίζες:

$$p_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -\sigma \pm j\omega_d, \quad (\sigma > 0) \tag{2-11}$$

όπου

$$\omega_n = |p_{1,2}| = |-\sigma \pm j\omega_d| = \sqrt{\sigma^2 + {\omega_d}^2} \tag{2-12}$$

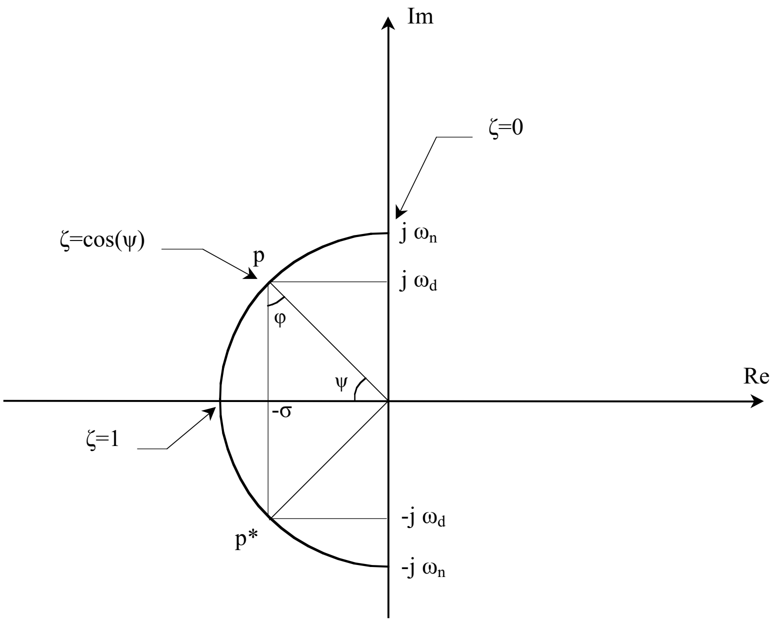
$$\sigma = \zeta\omega_n \tag{2-13}$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} \tag{2-14}$$

δηλαδή το ω_n είναι το μέτρο των (συζυγών) μιγαδικών ριζών, ενώ τα σ και ω_d δίνουν το πραγματικό και φανταστικό μέρος των ριζών (κατ' απόλυτη τιμή).

Σχόλιο

Οι ρίζες της Εξ. (2-9), για διάφορες τιμές της παραμέτρου ζ (0<ζ<1), μετακινούνται σε ημικύκλιο ακτίνας ω_n , όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



Σχήμα 2-4. Γεωμετρικός τόπος των ριζών της (2-9), για 0<ζ<1.

Γενικά ένα ζεύγος συζυγών μιγαδικών ριζών (p, p*), μπορεί να περιγραφεί πλήρως είτε απ' το ζεύγος (σ, ω_d), είτε απ' το ζεύγος (ζ, ω_n). Οι σχέσεις που συνδέουν τα μεγέθη αυτά, δόθηκαν παραπάνω: (2-12 έως 2-14).

Αναφέρουμε επίσης ότι ένα μέτρο του συντελεστή απόσβεσης ζ (που αντιστοιχεί στις συγκεκριμένες ρίζες), είναι η γωνία ψ (Σχήμα 2-4), αφού:

$$\cos\psi = \frac{\sigma}{\omega_n} = \zeta \tag{2-15}$$

οπότε προκύπτουν

$$\psi = \cos^{-1}\zeta \tag{2-16}$$

$$\sin\psi = \sqrt{1-\zeta^2} \tag{2-17}$$

Η γενική λύση της (2-8) με βάση τις ρίζες (2-11) της χαρακτηριστικής της εξίσωσης, θα είναι της μορφής:

$$i_L(t) = k_1 e^{-\sigma t}\sin(\omega_d t) + k_2 e^{-\sigma t}\cos(\omega_d t)$$

ή ισοδύναμα

$$i_L(t) = Ae^{-\sigma t}\cos(\omega_d t + \theta) \tag{2-18}$$

όπου τα Α και θ, είναι σταθερές που θα προσδιοριστούν χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες (2-1) και (2-2).

Από (2-18) και (2-1):

$$A\cos\theta = 10 \tag{2-19}$$

ενώ από (2-18) και (2-2), με την προϋπόθεση ότι Α≠0:

$$\sigma\cos\theta + \omega_d \sin\theta = 0 \Leftrightarrow \tan\theta = -\frac{\sigma}{\omega_d} \Leftrightarrow \theta = -\tan^{-1}\frac{\sigma}{\omega_d} \tag{2-20}$$

ή ισοδύναμα, με αναφορά στο Σχήμα 2-4

$$\theta = -\varphi = -\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) = -\frac{\pi}{2} + \psi = -\frac{\pi}{2} + \cos^{-1}\zeta \tag{2-21}$$

Από τις Εξ. (2-20) ή (2-21), υπολογίζεται το θ, οπότε από την (2-19) έχουμε:

$$A = \frac{10}{\cos\theta} = \frac{10}{\cos\varphi} = \frac{10}{\left(\frac{\omega_d}{\omega_n}\right)} = \frac{10\omega_n}{\omega_d} = \frac{10}{\sin\psi} \tag{2-22}$$

Τελικά η ζητούμενη τάση, θα είναι:

$$v(t) = v_L(t) = L\frac{di_L}{dt},$$

και χρησιμοποιώντας την Εξ. (2-18), έχουμε διαδοχικά

$$v(t) = -ALe^{-\sigma t}\left(\omega_d \sin(\omega_d t + \theta) + \sigma\cos(\omega_d t + \theta)\right), \text{ ή}$$

$$v(t) = -ALe^{-\sigma t}\sqrt{\sigma^2 + \omega_d{}^2}\,\sin\left((\omega_d t + \theta) + \tan^{-1}\frac{\sigma}{\omega_d}\right)^{\bullet}$$

ή (από 2-12 και 2-20)

$$v(t) = -ALe^{-\sigma t}\omega_n \sin\left((\omega_d t + \theta) + (-\theta)\right), \text{ ή τελικά}$$

• Χρησιμοποιήθηκε η σχέση:

$$A\sin(a) + B\cos(a) = D\sin(a + \phi)$$

όπου

$$D = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad (> 0, \forall A, B \in)$$

και

$$\phi = \begin{cases} \tan^{-1}(B/A), & A > 0 \\ \pi + \tan^{-1}(B/A), & A < 0 \end{cases}$$

$$v(t) = -AL\omega_n e^{-\sigma t}\sin(\omega_d t) \qquad (2\text{-}23)$$

Η (2-23) περιγράφει μια ταλάντωση με απόσβεση και έχει ένα μέγιστο (κατ' απόλυτη τιμή). Στη μόνιμη κατάσταση η v(t) μηδενίζεται λόγω του εκθετικού όρου. Η μέγιστη τιμή της τάσης προκύπτει για τη μικρότερη τιμή του t (έστω t_p):

$$\frac{dv}{dt} = 0 \Leftrightarrow \omega_d \cos\omega_d t = \sigma \sin\omega_d t \Leftrightarrow \tan\omega_d t = \frac{\omega_d}{\sigma}$$

$$\tan\omega_d t = \tan\psi \Leftrightarrow \omega_d t = \psi$$

και τελικά

$$t_p = \frac{\psi}{\omega_d} = \frac{\cos^{-1}\zeta}{\omega_d} \qquad (2\text{-}24)$$

και η αντίστοιχη μέγιστη τάση, είναι:

$$v_{\max} = v(t_p)$$

ή τελικά

$$v_{\max} = -AL\omega_n e^{-\frac{\psi}{\tan\psi}}\sin\psi \qquad (2\text{-}25)$$

Λύση με Χρήση Matlab

Οι παρακάτω εντολές σε MATLAB, μας επιτρέπουν να πάρουμε τη γραφική παράσταση της (2-23), που προέκυψε θεωρητικά.

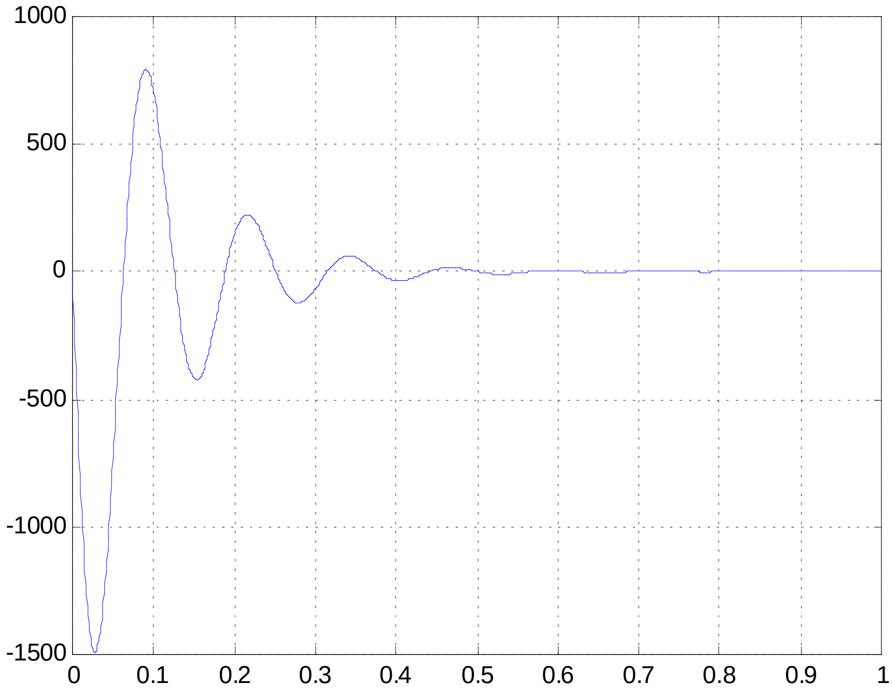
rlc.m

```
R=500; L=50/13; C=100e-6;
wn=1/sqrt(L*C);
z=sqrt(L/C)/(2*R);
s=z*wn;
wd=wn*sqrt(1-z^2);
y=acos(z);

th=y-pi/2;
A=10/cos(th);

dt=1/(100*s);  % dt << 1/s
tn=10/s;
t=(0:dt:tn)';
u=-A*L*wn*exp(-s*t) .* sin(wd*t);
plot(t,u);

tp=y/wd  % u_max = u(tp)
u_max=-A*L*wn*exp(-y/tan(y)) * sin(y)
```

Το t_p και η αντίστοιχη v_{max} για το δοσμένο κύκλωμα, προκύπτουν απ' τις (2-24) και (2-25):

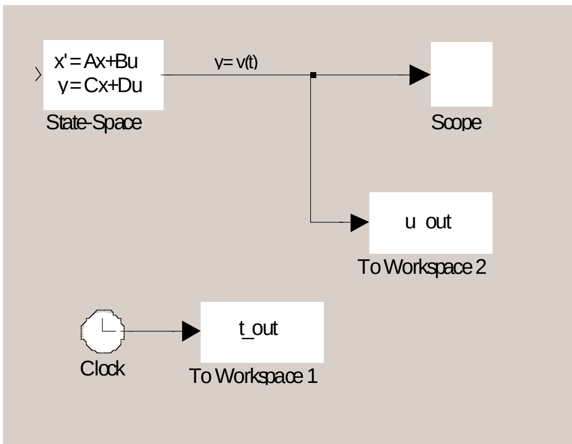
tp = 0.0275 s, u_max = -1490.1 V

Δηλαδή η μέγιστη τάση (αυτεπαγωγής) που αναπτύσσεται στα άκρα του πηνίου είναι περίπου 1500 V ! Η γραφική της παράσταση δίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



Σχήμα 2-5. Η έξοδος (τάση) του κυκλώματος που προέκυψε θεωρητικά.

Στην ίδια απόκριση καταλήγουμε χρησιμοποιώντας το παρακάτω μπλοκ διάγραμμα στο SIMULINK.



Σχήμα 2-6. Το κύκλωμα περιγράφεται απ' τις εξισώσεις κατάστασης (2-5), με αρχικές συνθήκες από (2-1), (2-2).

Τέλος αναφέρουμε, ότι στα ίδια αποτελέσματα οδηγούμαστε και με το ακόλουθο script file του MATLAB.

rlc_ode.m

```
R=500;  L=50/13;  C=100e-6;
wn=1/sqrt(L*C);
z=sqrt(L/C)/(2*R);
s=z*wn;
wd=wn*sqrt(1-z^2);
```

```
y=acos(z);

th=y-pi/2;
A=10/cos(th);

tp=y/wd  % u_max = u(tp)
u_max=-A*L*wn*exp(-y/tan(y)) * sin(y)

dt=1/(100*s);  % dt << 1/s
tn=10/s;
t=(0:dt:tn)';

x=[0 10]';  % initial state [vC(0) iL(0)]'

[tr,xr] = ode23 ('rlc_f_ode', t, x);
% xr is the solution matrix, where each row corresponds to a time
returned in vector tr

plot(tr,xr(:,1));  % xr(:,1)==vC, xr(:,2)==iL
```

όπου

rlc_f_ode.m

```
% Called by the solver (invoked in rlc_ode.m)
% -------------------------------------------
function dxdt = rlc_f_ode (t,x)
% State-Space Equations of the System: dxdt=f(t,x)
% x: the current state vector
% n (system's order) could be passed as another parameter / (here n=2)
dxdt=zeros(2,2); % memory allocation

dxdt = [-20 -10000; 0.26 0] * x;  % dxdt = A x
```