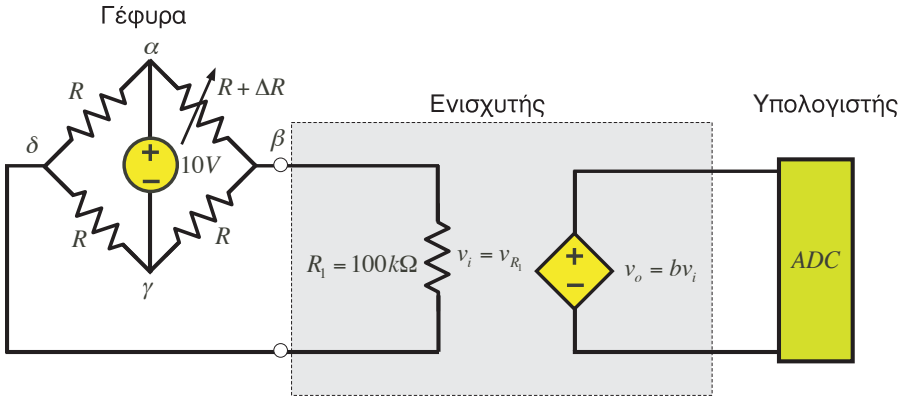
Εισαγωγή στα Ηλεκτρικά Κυκλώματα και Συστήματα



Ευάγγελου Παπαδόπουλου

Καθηγητή

Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Κεφάλαιο 7

Απόκριση στο Πεδίο του Χρόνου

Απόκριση σε Αρχικές Συνθήκες και Εισόδους

Στο κεφάλαιο αυτό, υπολογίζουμε την χρονική απόκριση κυκλωμάτων, ολοκληρώνοντας τις εξισώσεις κατάστασης ή τις εξισώσεις εισόδου-εξόδου που καταστρώνονται με τις μεθόδους του προηγούμενου κεφαλαίου. Εξετάζουμε με ιδιαίτερη έμφαση την απόκριση κυκλωμάτων πρώτης και δεύτερης τάξης σε αρχικές συνθήκες και σε εξωτερικές διεγέρσεις. Τέλος, παρουσιάζουμε τη γενική αναλυτική λύση της απόκρισης γραμμικών και χρονικά αμετάβλητων κυκλωμάτων και περιγράφουμε τον τρόπο αριθμητικής επίλυσης των εξισώσεων με υπολογιστή.

7-1 Τύποι Εισόδων Κυκλωμάτων

Οι είσοδοι σε ηλεκτρικά κυκλώματα είναι γενικά ιδανικές πηγές τάσης ή ρεύματος των οποίων η τάση ή το ρεύμα είναι δεδομένη συνάρτηση του χρόνου και δεν εξαρτάται από το συγκεκριμένο κύκλωμα στο οποίο είναι συνδεδεμένες. Για παράδειγμα, είσοδοι είναι η τάση 12V ενός συσσωρευτή αυτοκινήτου, η τάση μιας γεννήτριας εναλλασσόμενου ρεύματος, η τάση ή το ρεύμα που εφαρμόζεται στο κύκλωμα μέσω ενός **ενισχυτή**, δηλαδή μιας διάταξης ισχύος που δρα ως πηγή ρεύματος, κλπ. Στην περίπτωση ασθενών σημάτων, μία είσοδος τάσης μπορεί να επιβάλλεται σε ένα κύκλωμα από το ψηφιακό-σε-αναλογικό μετατροπέα (DAC) ενός υπολογιστή. Ακόμη, μία είσοδος μπορεί να οφείλεται σε επίδραση του περιβάλλοντος σε μορφή θορύβου τάσης.

Όπως αναφέραμε σε προηγούμενο κεφάλαιο, οι πραγματικές πηγές μπορούν κάτω από ορισμένες συνθήκες να θεωρηθούν ιδανικές πηγές. Όταν αυτό δεν είναι δυνατό, τότε προσεγγίζουμε τη συμπεριφορά τους με ένα μοντέλο που συνήθως περιλαμβάνει μία αντίσταση σε σειρά ή παράλληλα με την ανάλογη ιδανική πηγή. Κατά την ανάλυση ενός κυκλώματος, η εσωτερική αυτή αντίσταση της πηγής (εάν χρησιμοποιείται) προστίθεται στο υπόλοιπο κύκλωμα, έτσι ώστε η είσοδος του κυκλώματος να είναι η ιδανική πηγή ή γενικότερα, ένα σύνολο από ιδανικές πηγές.

Μία είσοδος επιβάλλει σε ένα σημείο του κυκλώματος τάση ή ρεύμα που είναι συνάρτηση του χρόνου. Η **απόκριση** του κυκλώματος, δηλαδή η εξέλιξη των τάσεων και των ρευμάτων των στοιχείων που το απαρτίζουν ως συνάρτηση του χρόνου εξαρτάται προφανώς από το είδος της εισόδου (εισόδων) που εφαρμόζονται στο κύκλωμα. Οι είσοδοι αυτές λέγονται και **διεγέρσεις** του κυκλώματος.

Μία είσοδος μπορεί να είναι μία αυστηρά καθορισμένη συνάρτηση του χρόνου ή να είναι **τυχαία μεταβλητή** που περιγράφεται από στατιστικές παραμέτρους, όπως η μέση τιμή και η διασπορά. Στο βιβλίο αυτό θα ασχοληθούμε με το πρώτο είδος εισόδων.

Οι είσοδοι επίσης μπορούν να ταξινομηθούν σε **περιοδικές** και **απεριοδικές** συναρτήσεις του χρόνου. Οι πρώτες επαναλαμβάνονται μετά από κάποιο χρονικό διάστημα T, για παράδειγμα

$$v_s(t) = 220\sin(\frac{2\pi t}{T})V = 220\sin(\omega t)V \tag{7-1}$$

ενώ οι απεριοδικές είσοδοι δεν επαναλαμβάνονται, για παράδειγμα

$$i_s(t) = (1 - e^{-2t})A \tag{7-2}$$

Στα ηλεκτρικά κυκλώματα συναντάμε και τους δύο τύπους εισόδων. Στο παρόν κεφάλαιο θα μας απασχολήσουν κατά κύριο λόγο οι απεριοδικές είσοδοι, ενώ οι περιοδικές είσοδοι θα μελετηθούν κατά τη διάρκεια της μόνιμης κατάστασης της απόκρισης, στο επόμενο κεφάλαιο.

Οι είσοδοι μπορούν να ταξινομηθούν σε **ομαλές** και **μη ομαλές** (**ανώμαλες**) συναρτήσεις. Οι ομαλές είσοδοι περιγράφονται από συνεχείς συναρτήσεις του χρόνου, όπως για παράδειγμα το ρεύμα της Εξ. (7-2), ενώ οι μη ομαλές περιγράφονται από μη συνεχείς συναρτήσεις, περιλαμβάνουν δηλαδή ασυνέχειες, π.χ.

$$v_s(t) = \begin{cases} -10V & t \le 0 \\ 10V & t > 0 \end{cases} \tag{7-3}$$

Οι ανώμαλες είσοδοι είναι ιδιαίτερα χρήσιμες γιατί προσεγγίζουν ορισμένες υπαρκτές εισόδους στην πράξη των κυκλωμάτων και γιατί η αναλυτική ή πειραματική μελέτη της απόκρισης σε αυτές μπορεί να χρησιμοποιηθεί για το χαρακτηρισμό ενός κυκλώματος από άποψη τάξης, δυναμικής συμπεριφοράς, κλπ.

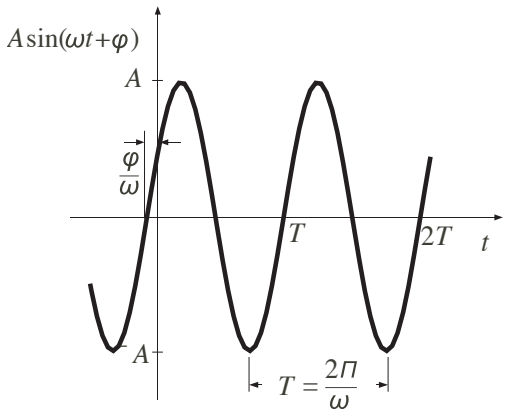
Στοιχειώδεις Ομαλές Είσοδοι

(α) Ημιτονοειδής Είσοδος

Μία **ημιτονοειδής είσοδος** παρίσταται από μία από τις επόμενες μορφές

$$A\sin(\omega t + \phi) = A\sin(\frac{2\pi t}{T} + \phi) = A\sin(2\pi v t + \phi) \tag{7-4}$$

όπου A είναι το **πλάτος** της εισόδου, ω η **κυκλική συχνότητα** (σε rad/s), ϕ η **φάση** (σε rad), T η **περίοδος** (σε s) και v η **συχνότητα** (σε Hz), βλ. Σχ. 7-1.



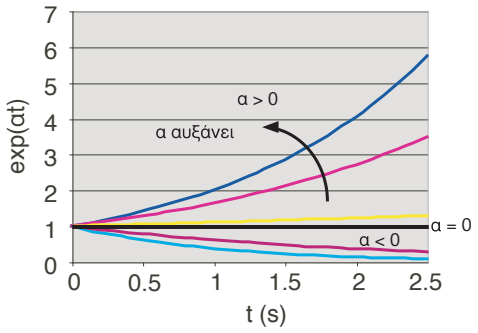
Σχήμα 7-1. Ημιτονοειδής είσοδος.

(β) Εκθετική Είσοδος

Μία **εκθετική είσοδος** παρίσταται από τη συνάρτηση

$$ce^{st} \tag{7-5}$$

όπου s,c είναι γενικά μιγαδικές σταθερές προκειμένου για ανάλυση κυκλωμάτων, αλλά πραγματικές σταθερές προκειμένου για εισόδους στην πράξη. Το Σχ. 7-2 παρουσιάζει εκθετικές εισόδους για $c=1$ και διάφορες τιμές της πραγματικής σταθεράς $s=a$ στον εκθέτη. Η σταθερά αυτή εκφράζει την ταχύτητα με την οποία το εκθετικό αυξάνεται ή ελαττώνεται ως συνάρτηση του χρόνου και έχει μονάδες s^{-1}.



Σχήμα 7-2. Εκθετική είσοδος.

Η εκθετική είσοδος παρουσιάζει αναλυτικό ενδιαφέρον γιατί η επίλυση των διαφορικών εξισώσεων βασίζεται σε εκθετικές συναρτήσεις. Επίσης, με τις συναρτήσεις αυτές μπορεί κανείς να περιγράψει ημιτονικές εισόδους σε συμπτυγμένη μορφή λόγω των σχέσεων

$$\begin{aligned} e^{j\omega t} &= \cos(\omega t) + j\sin(\omega t) \\ e^{-j\omega t} &= \cos(\omega t) - j\sin(\omega t) \end{aligned} \tag{7-6}$$

και των εξισώσεων του Euler

$$\begin{aligned} \cos(\omega t) &= \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \\ \sin(\omega t) &= \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \end{aligned} \tag{7-7}$$

Στοιχειώδεις Ανώμαλες Είσοδοι

(α) Μοναδιαία Βηματική Είσοδος

Η **μοναδιαία βηματική είσοδος** ορίζεται από την εξής σχέση

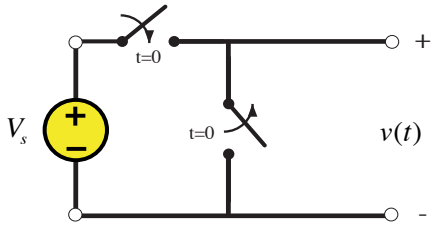
$$u_s(t) = \begin{cases} 0 & t \le 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \tag{7-8}$$

και παρίσταται στο Σχ. 7-3, λέγεται δε μοναδιαία γιατί η τιμή της είναι 1 για χρόνο $t>0$. Με τη συνάρτηση αυτή μπορούμε να παραστήσουμε βηματικές εισόδους όπως

$$v(t) = \begin{cases} 0 & t \le 0 \\ v_s & t > 0 \end{cases} = u_s(t)v_s \tag{7-9}$$

Με μία βηματική είσοδο μπορούμε να περιγράψουμε σε πρώτη προσέγγιση την επενέργεια διακοπτών, βλ. Σχ. 7-4.

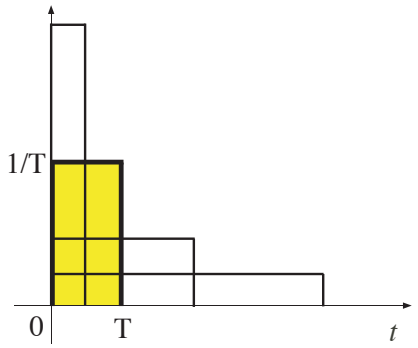
Σχήμα 7-3. Μοναδιαία Βηματική Είσοδος



Σχήμα 7-4. Κύκλωμα για πραγματοποίηση βηματικής εισόδου.

(β) Μοναδιαία Κρουστική Είσοδος

Υπάρχουν φαινόμενα που αντιστοιχούν σε μία διέγερση (είσοδο) μικρής χρονικής διάρκειας. Σε αυτές τις περιπτώσεις είναι χρήσιμο να αναλύσουμε την απόκριση ενός κυκλώματος σε μία **μοναδιαία κρουστική είσοδο**. Για να ορίσουμε αυτή την είσοδο, θεωρούμε ένα παλμό μικρής διάρκειας του οποίου το εμβαδό είναι σταθερό και ίσο με τη μονάδα, όπως φαίνεται στο Σχ. 7-5.



Σχήμα 7-5. Παλμός που στο όριο καταλήγει σε μοναδιαία κρουστική είσοδο.

$$\delta_T(t) = \begin{cases} 0 & t \le 0 \\ \dfrac{1}{T} & 0 < t \le T \\ 0 & t > T \end{cases} \tag{7-10}$$

Η μοναδιαία κρουστική είσοδος ορίζεται ως το όριο του παλμού όταν το εύρος του τείνει στο μηδέν, δηλαδή

$$\delta(t) = \lim_{T \to 0} \delta_T(t) \tag{7-11}$$

Η μοναδιαία κρουστική είσοδος, ή συνάρτηση Dirac, έχει την εξής ιδιότητα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1 \tag{7-12}$$

που είναι ιδιαίτερα εξυπηρετική όταν έχουμε εισόδους βραχείας διάρκειας και μεταβλητές που κατά το πολύ μικρό αυτό διάστημα παραμένουν αμετάβλητες. Ένα παράδειγμα φαινομένου που μπορεί να παρασταθεί από μία μοναδιαία κρουστική είσοδο είναι η αστραπή που κτυπά μία κεραία.

Χρονικά Μετατοπισμένες Είσοδοι

Εάν κάποια είσοδος ή διέγερση κυκλώματος συμβαίνει σε χρόνο άλλο από την αρχή του χρόνου, τότε μπορούμε να μετατοπίσουμε την επενέργεια της εισόδου με αντικατάσταση του χρόνου t_0 με $t - t_0$. Για παράδειγμα,

$$u_s(t - t_0) = \begin{cases} 0 & t \le t_0 \\ 1 & t > t_0 \end{cases} \tag{7-13}$$

Με τη μετατόπιση μπορούμε να συνθέσουμε εισόδους που δεν είναι στοιχειώδεις (μπορούν να αναλυθούν περαιτέρω σε στοιχειώδεις εισόδους). Για παράδειγμα, ο παλμός της Εξ. (7-10) μπορεί να γραφεί ως

$$\delta_T(t) = \frac{1}{T}u_s(t) - \frac{1}{T}u_s(t - T) \tag{7-14}$$

Λόγω αυτής της σχέσης και του ορισμού (7-11) γράφουμε ότι

$$\frac{d}{dt}u_s(t) = \delta(t) \tag{7-15}$$

7-2 Αναλυτικός Προσδιορισμός Απόκρισης

Αφού ορίσαμε ορισμένες από τις εισόδους που συναντάμε στην απόκριση κυκλωμάτων, παρουσιάζουμε εδώ σε συντομία την κλασική μέθοδο προσδιορισμού της απόκρισης κάποιας μεταβλητής ή ισοδύναμα την ολοκλήρωση της διαφορικής εξίσωσης που συνδέει την είσοδο με την μεταβλητή αυτή (έξοδο). Σε επόμενο εδάφιο θα εξετάσουμε τον προσδιορισμό της απόκρισης όταν το κύκλωμα περιγράφεται με εξισώσεις κατάστασης και εξισώσεις εξόδου.

Υποθέτουμε εδώ οι μέθοδοι του προηγουμένου κεφαλαίου μας οδήγησαν στην εξής διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^n}{dt^n}y + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y + a_{n-2}\frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}}y + \cdots + a_0 y = b_p\frac{d^p}{dt^p}u + \cdots + b_0 u \tag{7-16}$$

όπου $p \le n$. Το δεύτερο μέλος της εξίσωσης αυτής είναι μία συνάρτηση της εισόδου $u(t)$ που είναι γνωστή, άρα το δεύτερο μέλος είναι μία γνωστή συνάρτηση του χρόνου. Θέτουμε στη συνέχεια

$$f(t) = b_p\frac{d^p}{dt^p}u + \cdots + b_0 u \tag{7-17}$$

και ονομάζουμε την $f(t)$ **διεγείρουσα συνάρτηση**, διότι αντιπροσωπεύει τη διέγερση του κυκλώματος. Δεν θα ασχοληθούμε εδώ με την απόδειξη της ύπαρξης και

μοναδικότητας της λύσης, αλλά απλώς αναφέρουμε ότι η λύση υπάρχει και είναι μοναδική.

Η γενική λύση της Εξ. (7-16) αποτελείται από δύο μέρη

$$y(t) = y_o(t) + y_\mu(t) \tag{7-18}$$

όπου $y_o(t)$ είναι η λύση της εξίσωσης όταν η $f(t)$ είναι μηδέν και λέγεται **ομογενής λύση** και $y_\mu(t)$ είναι μία **μερική λύση** που ικανοποιεί την αρχική διαφορική εξίσωση.

Λύση της Ομογενούς Εξίσωσης

Η ομογενής εξίσωση λαμβάνεται από την πλήρη μηδενίζοντας τη διέγερση, είναι δηλαδή

$$\frac{d^n}{dt^n}y + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y + a_{n-2}\frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}}y + \cdots + a_0 y = 0 \tag{7-19}$$

Υποθέτουμε ότι μία λύση της ομογενούς έχει τη μορφή $ce^{\lambda t}$, όπου c και λ είναι γενικά μιγαδικές σταθερές. Στη συνέχεια αντικαθιστούμε την εκθετική μορφή στην Εξ. (7-19) και το αποτέλεσμα είναι μία συνθήκη που πρέπει να ικανοποιείται προκειμένου η λύση που υποτέθηκε να ικανοποιεί την εξίσωση αυτή

$$c(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + a_0)e^{\lambda t} = 0 \tag{7-20}$$

Επειδή η σταθερά c είναι μη μηδενική (για να αποφύγουμε την προφανή λύση) και επίσης η εκθετική συνάρτηση είναι διάφορη του μηδενός, θα πρέπει να ισχύει

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + a_0 = 0 \tag{7-21}$$

Δηλαδή το λ είναι ρίζα της Εξ. (7-21) που λέγεται **χαρακτηριστική εξίσωση**[2] και σχηματίζεται αν οι παράγωγοι i-τάξης στην Εξ. (7-20) αντικατασταθούν με λ^i. Το αριστερό μέρος της Εξ. (7-21) λέγεται χαρακτηριστικό πολυώνυμο. Η χαρακτηριστική εξίσωση (7-21) έχει n ρίζες και επομένως n εκθετικές συναρτήσεις επαληθεύουν την ομογενή εξίσωση. Επί πλέον, ο γραμμικός συνδυασμός αυτών των λύσεων είναι επίσης λύση της ομογενούς και μάλιστα αυτή είναι η γενική λύση της ομογενούς

$$y_o(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i t} \tag{7-22}$$

Οι συντελεστές c_i $(i = 1,\cdots,n)$ προσδιορίζονται έτσι ώστε η λύση (7-22) να ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες

$$y(t)\big|_{t=0} = k_0, \quad \frac{d}{dt}y(t)\bigg|_{t=0} = k_1, \cdots, \quad \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y(t)\bigg|_{t=0} = k_{n-1} \tag{7-23}$$

Εάν η διεγείρουσα συνάρτηση είναι μηδέν, οι συντελεστές c_i $(i = 1,\cdots,n)$ υπολογίζονται αφού έχει βρεθεί η Εξ. (7-22), διότι η λύση της ομογενούς είναι και λύση της αρχικής διαφορικής εξίσωσης Εξ. (7-16). Η λύση που προκύπτει λέγεται **απόκριση σε αρχικές**

[2] Η χαρακτηριστική εξίσωση μπορεί να ευρεθεί και με αντικατάσταση του τελεστή S από τη μεταβλητή λ στην Εξ. (6-55) και μηδενισμό του δεύτερου μέλους της. Με άλλα λόγια, η χαρακτηριστική εξίσωση μπορεί να γραφεί και ως det(λI-A) = 0.

συνθήκες, διότι η μεταβολή στην έξοδο $y(t)$ οφείλεται στις αρχικές συνθήκες και μόνο. Αν αυτές είναι όλες μηδέν, η $y(t)$ είναι επίσης μηδέν.

Παράδειγμα 7-1

Να υπολογισθεί η απόκριση της τάσης του πυκνωτή του Σχ. 6-2, όταν ισχύει $V_s = 0, v_C(0) = 12V, \dot{v}_C(0) = 0, L = 1H, C = 0.1F, R = 10\Omega$.

Λύση

Η διαφορική εξίσωση που διέπει την τάση του πυκνωτή έχει βρεθεί στο Παρ. 6.10 και όταν η πηγή έχει τάση μηδέν, είναι

$$LC\frac{d^2}{dt^2}v_C + RC\frac{d}{dt}v_C + v_C = 0$$

Παρατηρούμε ότι η εξίσωση αυτή είναι ομογενής, επομένως δεν χρειάζεται να ασχοληθούμε με μερική λύση. Αντικαθιστούμε τις αριθμητικές τιμές των στοιχείων και έχουμε

$$\frac{d^2}{dt^2}v_C + 10\frac{d}{dt}v_C + 10v_C = 0$$

Η διαφορική εξίσωση είναι δεύτερης τάξης, επομένως η τάση δίνεται από την Εξ. (7-22) ως εξής

$$v_C(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

όπου οι σταθερές λ_i είναι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης

$$\lambda^2 + 10\lambda + 10 = 0$$

Η επίλυση αυτής της εξίσωσης δίνει $\lambda_1 = -1.13, \lambda_2 = -8.87$. Επομένως

$$v_C(t) = c_1 e^{-1.13t} + c_2 e^{-8.87t}$$

Προκειμένου να υπολογίσουμε τους άγνωστους συντελεστές, χρησιμοποιούμε τις αρχικές συνθήκες και γράφουμε

$$v_C(0) = 12 = c_1 + c_2$$
$$\dot{v}_C(0) = 0 = -1{,}13c_1 - 8{,}87c_2$$

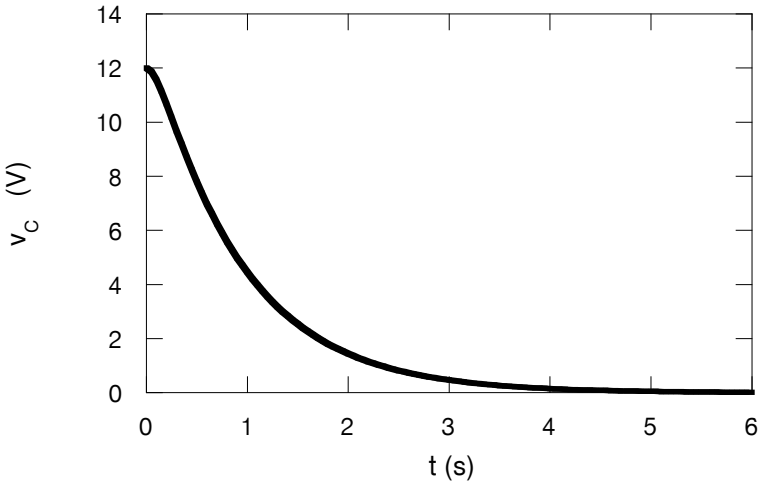
Οι εξισώσεις αυτές είναι ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους που επιλυόμενο δίνει

$$c_1 = +13{,}75$$
$$c_2 = -1{,}75$$

Επομένως, η απόκριση της τάσης του πυκνωτή είναι

$$v_C(t) = 13.75e^{-1{,}13t} - 1.75e^{-8{,}87t}$$

και παρουσιάζεται στο Σχ. 7-6. Παρατηρούμε ότι η τάση ξεκινά από τα 12V με ρυθμό μηδέν (η κλίση της καμπύλης είναι μηδέν στην αρχή του χρόνου). Με την πρόοδο του χρόνου, η κλίση αυξάνει απόλυτα και η τάση μειώνεται επειδή ο πυκνωτής εκφορτίζεται. Η ενέργεια που ήταν αποθηκευμένη σε αυτόν μετατρέπεται τελικά σε θερμότητα από την αντίσταση.



Σχήμα 7-6. Απόκριση σε αρχικές συνθήκες του πυκνωτή του κυκλώματος του Σχ. 6-2.

Είναι ενδιαφέρον να δούμε τι θα συμβεί εάν η αντίσταση αυξηθεί. Σε αυτή την περίπτωση, το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα θα είναι μικρότερο και επομένως θα περάσει περισσότερος χρόνος μέχρι να εκφορτισθεί ο πυκνωτής. Επιβεβαιώστε την παρατήρηση αυτή επαναλαμβάνοντας το παράδειγμα με $R = 100\Omega$. ■

Ειδική Περίπτωση. Εάν υπάρχει ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης με **πολλαπλότητα** μεγαλύτερη της μονάδας $k > 1$, δηλαδή εάν μία ρίζα εμφανίζεται k φορές, τότε στην ομογενή λύση χρησιμοποιούμε τις εξής k γραμμικά ανεξάρτητες στοιχειώδεις εκθετικές συναρτήσεις

$$c_1 e^{\lambda t}, \cdots, c_k t^{k-1} e^{\lambda t} \tag{7-24}$$

όπου k είναι η πολλαπλότητα της ρίζας λ.

Λύση της Μη-ομογενούς Εξίσωσης

Η κυριότερη μέθοδος που εφαρμόζεται για να βρεθεί μία μερική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι η **μέθοδος των αγνώστων συντελεστών**. Κατά τη μέθοδο αυτή, η μορφή της μερικής λύσης εξαρτάται από τη διεγείρουσα συνάρτηση και οι συντελεστές που περιέχει υπολογίζονται έτσι ώστε η μερική λύση να επαληθεύει τη διαφορική εξίσωση.

Η λύση που προκύπτει λέγεται και **απόκριση σε διεγείρουσα συνάρτηση**, διότι η μεταβολή στην έξοδο $y(t)$ οφείλεται αποκλειστικά στις εισόδους και τη διεγείρουσα συνάρτηση.

Ειδική Περίπτωση. Εάν η διεγείρουσα συνάρτηση περιέχει εκθετική συνάρτηση της οποίας η παράμετρος ταυτίζεται με μία από τις ρίζες της χαρακτηριστικής συνάρτησης, τότε στη μερική λύση χρησιμοποιούμε τον εκθετικό όρο πολλαπλασιασμένο επί τη

μικρότερη δυνατή δύναμη του χρόνου, έτσι ώστε ο όρος αυτός να μην περιέχεται στη λύση της ομογενούς εξίσωσης, δηλαδή

$$y_\mu(t) = Kt^k e^{st} \tag{7-25}$$

όπου στη λύση της ομογενούς περιέχεται το πολύ ο όρος $t^{k-1}e^{st}$.

Πίνακας 7-1. Όροι στη μερική λύση κατά τη μέθοδο των αγνώστων συντελεστών.

Όρος στη διεγείρουσα συνάρτηση	Όρος στη μερική λύση
k	K
kt^n	$K_0 + K_1 t + \cdots + K_n t^n$
$ke^{\lambda t}$	$Ke^{\lambda t}$
$ke^{j\omega t}$	$Ke^{j\omega t}$
$k\cos(\omega t)$	$K_1 \sin(\omega t) + K_2 \cos(\omega t)$
$k\sin(\omega t)$	$K_1 \sin(\omega t) + K_2 \cos(\omega t)$

Παράδειγμα 7-2

Να ευρεθεί η μερική λύση για τη διαφορική εξίσωση που διέπει την τάση του πυκνωτή του Σχ. 6-2

$$LC\frac{d^2}{dt^2}v_C + RC\frac{d}{dt}v_C + v_C = v_s$$

όταν $(i)\, v_s = 12V$, $(ii)\, v_s = 12\cos(t)V$, με $L = 1H, C = 0.1F, R = 10\Omega$.

Λύση

(i) Στην πρώτη περίπτωση, η τάση είναι σταθερή, επομένως η μερική λύση είναι

$$v_{C\mu}(t) = K$$

Αντικαθιστούμε τη μερική λύση στη διαφορική εξίσωση και έχουμε

$$K = V_s = 12 \Rightarrow v_{C\mu}(t) = 12\,V$$

Η λύση αυτή ταυτίζεται με την τιμή της απόκρισης στη **μόνιμη κατάσταση**, δηλαδή στην κατάσταση στην οποία οι παράγωγοι είναι μηδέν και η τάση βρίσκεται σε ηρεμία.

(ii) Στη δεύτερη περίπτωση, η τάση είναι ημιτονοειδής (περιοδική), επομένως η μερική λύση είναι της μορφής

$$v_{C\mu}(t) = K_1 \sin(t) + K_2 \cos(t)$$

δηλαδή έχει την ίδια συχνότητα με τη διεγείρουσα συνάρτηση. Οι παράγωγοι της συνάρτησης αυτής είναι

$$\frac{d}{dt}v_{C\mu}(t) = K_1\cos(t) - K_2\sin(t)$$
$$\frac{d^2}{dt^2}v_{C\mu}(t) = -K_1\sin(t) - K_2\cos(t)$$

Αντικαθιστούμε τη λύση αυτή στη διαφορική εξίσωση και έχουμε

$$LC\left(-K_1\sin(t) - K_2\cos(t)\right) + RC\left(K_1\cos(t) - K_2\sin(t)\right) + K_1\sin(t) + K_2\cos(t) = V_s \Rightarrow$$
$$\sin(t)\left(-LCK_1 - RCK_2 + K_1\right) + \cos(t)\left(-LCK_2 + RCK_1 + K_2\right) = 12\sin(t)$$

Επειδή η σχέση αυτή πρέπει να ισχύει για κάθε χρόνο t, εξισώνουμε τους συντελεστές του ημιτόνου και συνημιτόνου των δύο μερών και έχουμε ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους

$$\left.\begin{array}{l} -LCK_1 - RCK_2 + K_1 = 12 \\ -LCK_2 + RCK_1 + K_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -0{,}1K_1 - K_2 + K_1 = 12 \\ -0{,}1K_2 + K_1 + K_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$
$$\left.\begin{array}{l} 0{,}9K_1 - K_2 = 12 \\ +K_1 + 0{,}9K_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} K_1 = 5{,}97 \\ K_2 = -6{,}63 \end{array}$$

Επομένως, η μερική λύση είναι

$$v_{C\mu}(t) = 5{,}97\sin(t) - 6{,}63\cos(t)\,V \qquad \blacksquare$$

Λύση της Πλήρους Εξίσωσης

Η λύση αυτή βρίσκεται με εφαρμογή της Εξ. (7-18) αφού προηγουμένως προσδιοριστεί η μερική λύση. Οι συντελεστές της ομογενούς λύσης βρίσκονται από τις αρχικές συνθήκες.

Παράδειγμα 7-3

Να ευρεθεί η γενική λύση για τη διαφορική εξίσωση που διέπει την τάση του πυκνωτή του Σχ. 6-2

$$LC\frac{d^2}{dt^2}v_C + RC\frac{d}{dt}v_C + v_C = v_s$$

όταν $v_s = 12V$, και $v_C(0) = 12V, \dot{v}_C(0) = 0, L = 1H, C = 0.1F, R = 10\Omega$.

Λύση

Η μερική λύση προσδιορίστηκε στο Παρ. 7-3 ενώ η λύση της ομογενούς προσδιορίστηκε στο Παρ. 7-1. Επομένως, η γενική λύση είναι

$$v_C(t) = c_1e^{-1{,}13t} + c_2e^{-8{,}87t} + 12$$

Οι αρχικές συνθήκες δίδουν

$$v_C(0) = 12 = c_1 + c_2 + 12 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0$$
$$\dot{v}_C(0) = 0 = -1{,}13c_1 - 8{,}87c_2$$

Οι εξισώσεις αυτές είναι ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους που επιλυόμενο δίνει

$$c_1 = 0$$
$$c_2 = 0$$

Επομένως, η απόκριση είναι

$$v_C(t) = 12\,V$$

δηλαδή, η τάση του πυκνωτή παραμένει σταθερή. Αυτό συμβαίνει διότι ο πυκνωτής και η πηγή βρίσκονται στην ίδια τάση ενώ και ο ρυθμός αλλαγής της τάσης του πυκνωτή στον αρχικό χρόνο είναι μηδέν. Επομένως δεν υπάρχει ρεύμα και μετακίνηση φορτίου στο κύκλωμα, ο πυκνωτής διατηρεί την τάση του, ενώ ο επαγωγέας δρα ως βραχυκύκλωμα. ■

Παράδειγμα 7-4

Να ευρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης που διέπει το ρεύμα ενός επαγωγέα

$$\frac{d^2}{dt^2} i_L + 5\frac{d}{dt} i_L + 6 i_L = 6 i_s$$

όταν $i_s = e^{-3t} A$, και $i_L(0) = 1A, \dot{i}_L(0) = 0$.

Λύση

Η χαρακτηριστική εξίσωση που αντιστοιχεί στη διαφορική εξίσωση είναι

$$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2, \lambda_2 = -3$$

Επομένως η λύση της ομογενούς εξίσωσης είναι

$$i_{Lo}(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}$$

Παρατηρούμε ότι η διεγείρουσα συνάρτηση περιέχει εκθετικό όρο που ανήκει στη λύση της ομογενούς. Εάν υποθέσουμε (εσφαλμένα) ότι η μερική λύση είναι

$$i_{L\mu}(t) = K e^{-3t}$$

και αντικαταστήσουμε στη διαφορική εξίσωση, έχουμε

$$K(9 - 15 + 6)e^{-3t} = e^{-3t} \Rightarrow 0 = e^{-3t}$$

δηλαδή, δεν είναι δυνατόν να υπολογίσουμε τιμή για το K τέτοια ώστε το K να την καθιστά μερική λύση.

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας την Εξ. (7-25) γράφουμε τη (σωστή) μερική λύση

$$i_{L\mu}(t) = K t e^{-3t}$$

διότι ο όρος te^{-3t} δεν περιέχεται στη λύση της ομογενούς. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε με αντικατάσταση στη διαφορική εξίσωση

$$K\left((9te^{-3t} - 3e^{-3t} - 3e^{-3t}) + 5(-3te^{-3t} + e^{-3t}) + 6te^{-3t}\right) = 6e^{-3t} \Rightarrow$$
$$K(-e^{-3t}) = 6e^{-3t} \Rightarrow$$
$$K = -6$$

Επομένως, η μερική λύση είναι

$$i_{L\mu}(t) = -6te^{-3t}$$

Στη συνέχεια, συνθέτουμε τη γενική λύση ως εξής

$$i_L(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t} - 6te^{-3t}$$

Οι αρχικές συνθήκες δίδουν

$$i_L(0) = c_1 + c_2 = 1$$

$$i_L(0) = -2c_1 - 3c_2 - 6 = 0$$

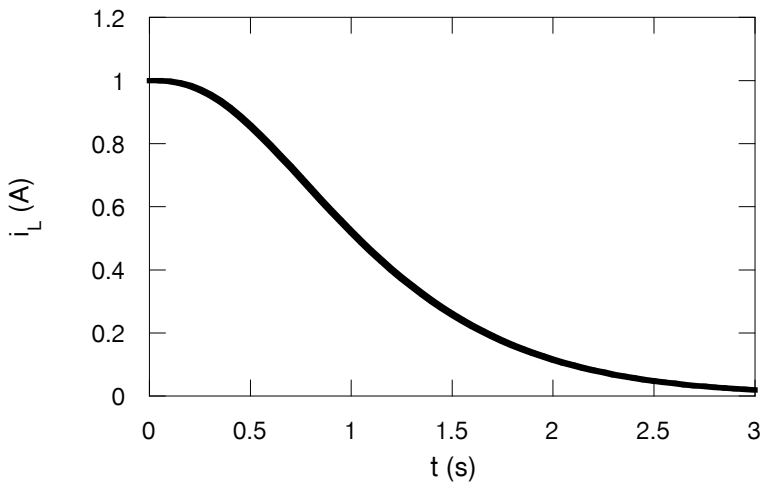
Επιλύοντας αυτό το σύστημα έχουμε

$$c_1 = 9$$
$$c_2 = -8$$

Η απόκριση του ρεύματος είναι

$$i_L(t) = 9e^{-2t} - 8e^{-3t} - 6te^{-3t}$$

και παρουσιάζεται στο Σχ. 7-7.



Σχήμα 7-7. Απόκριση ρεύματος για τον επαγωγέα του Παρ. 7.4.

Προκειμένου να ελέγξουμε την ορθότητα της απόκρισης, παρατηρούμε ότι ξεκινά από 1A με μηδενική κλίση, δηλαδή οι αρχικές συνθήκες επαληθεύονται. Επίσης, παρατηρούμε ότι η απόκριση κατευθύνεται προς το μηδέν επειδή όλα τα εκθετικά φθίνουν, και μάλιστα φθίνουν πιο γρήγορα από ότι αυξάνει η συνάρτηση *t*. ■

7-3 Ιδιότητες Γραμμικών Κυκλωμάτων

Η μέθοδος αναλυτικού προσδιορισμού της απόκρισης κάποιας μεταβλητής ενός κυκλώματος είναι γενική και μπορεί να εφαρμόζεται σε όλες τις περιπτώσεις όπου ένα κύκλωμα περιγράφεται από μία γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές. Η εφαρμογή όμως της μεθόδου αυτής είναι επίπονος και για το λόγο αυτό πολλές φορές χρησιμοποιούμε ιδιότητες των γραμμικών και χρονικά αμετάβλητων κυκλωμάτων για να συνθέσουμε τη λύση από άλλες απλούστερες, ή γνωστές λύσεις.

Αναλλοίωτο της Απόκρισης ως προς Χρόνο

Για κυκλώματα που περιγράφονται από γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές, εάν $y(t)$ είναι η απόκριση σε μία είσοδο $u(t)$, τότε η απόκριση σε μία καθυστερημένη είσοδο $u(t-T)$ είναι $y(t-T)$, δηλαδή η ίδια απόκριση με καθυστέρηση T.

Αυτή η ιδιότητα δεν ισχύει όταν οι παράμετροι ενός κυκλώματος είναι χρονικά μεταβαλλόμενες. Για παράδειγμα, εάν μία αντίσταση λειτουργεί σε ένα περιβάλλον με μεγάλες διαφορές θερμοκρασίας σε μικρό χρόνο, τότε η συμπεριφορά του κυκλώματος θα εξαρτάται από το χρόνο που εφαρμόσθηκε η είσοδος και επομένως, σε διαφορετικούς χρόνους θα έχουμε διαφορετικές αποκρίσεις.

Συνήθως όμως, οι μεταβολές στα στοιχεία ενός κυκλώματος συμβαίνουν πολύ αργά σε σχέση με το χρόνο απόκρισης του κυκλώματος στις εισόδους και επομένως μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι συντελεστές της διαφορικής εξίσωσης εισόδου εξόδου (ή οι πίνακες A,B,C,D) είναι σταθερές. Περιοδικά πάντως, πρέπει κανείς να επανέρχεται και να βαθμονομεί εκ νέου κριτικά κυκλώματα που επηρεάζονται από το χρόνο ή να έχει προβλέψει αυτή η βαθμονόμηση να γίνεται αυτόματα, π.χ. με ένα υπολογιστή.

Αρχή της Επαλληλίας

Η αρχή αυτή μπορεί να διατυπωθεί ως εξής. Η απόκριση ενός κυκλώματος στη διεγείρουσα συνάρτηση

$$f_1(t)+f_2(t)+\cdots+f_m(t) \tag{7-26}$$

αποτελείται από το άθροισμα της απόκρισης στις αρχικές συνθήκες, $y_o(t)$, και το άθροισμα των μερικών λύσεων που αντιστοιχούν στις επί μέρους διεγείρουσες συναρτήσεις

$$y(t)=y_o(t)+y_{f_1}(t)+y_{f_2}(t)+\cdots+y_{f_m}(t) \tag{7-27}$$

Αυτή την αρχή τη χρησιμοποιήσαμε ήδη στη γενική μέθοδο προσδιορισμού της απόκρισης, όπου είχαμε μία μόνο διεγείρουσα συνάρτηση.

Η αρχή της επαλληλίας μπορεί να εφαρμοσθεί επίσης και σε περιπτώσεις συνθέτων αρχικών συνθηκών. Πράγματι, εάν η απόκριση ενός κυκλώματος στις αρχικές συνθήκες $y_1(0)$, $\dot{y}_1(0)$,..., είναι $y_1(t)$ και στις $y_2(0)$, $\dot{y}_2(0)$ είναι $y_2(t)$,..., τότε η απόκριση στις αρχικές συνθήκες

$$b_1y_1(0)+b_2y_2(0),\quad b_1\dot{y}_1(0)+b_2\dot{y}_2(0),\cdots \tag{7-28}$$

είναι

$$y(t) = b_1 y_1(t) + b_2 y_2(t) + \cdots \tag{7-29}$$

Με την αρχή αυτή μπορούμε να συνθέτουμε εύκολα την απόκριση ενός συστήματος από στοιχειώδεις αποκρίσεις και να αποφεύγουμε την επίπονη γενική μεθοδολογία, ή ακόμη και την ανάγκη αριθμητικής επίλυσης ενός κυκλώματος με υπολογιστή.

Ιδιότητα Διαφόρισης

Εάν η απόκριση ενός κυκλώματος σε μία είσοδο $u(t)$ για την οποία ισχύει ότι $u(t) = 0, t < 0$ είναι $y_u(t)$, τότε η απόκριση του κυκλώματος στην είσοδο

$$u_1(t) = \frac{d}{dt} u(t) \tag{7-30}$$

είναι

$$y_{u_1}(t) = \frac{d}{dt} y_u(t) \tag{7-31}$$

Η ιδιότητα αυτή ισχύει επίσης και για τη διεγείρουσα συνάρτηση $f(t)$ εάν $f(t) = 0, t < 0$.

Ιδιότητα Ολοκλήρωσης

Εάν η απόκριση ενός κυκλώματος σε μία είσοδο $u(t)$ για την οποία ισχύει ότι $u(t) = 0, t < 0$ είναι $y_u(t)$, τότε η απόκριση του κυκλώματος στην είσοδο

$$u_1(t) = \int_0^t u(t)dt \tag{7-32}$$

είναι

$$y_{u_1}(t) = \int_0^t y_u(t)dt \tag{7-33}$$

Η ιδιότητα αυτή ισχύει επίσης και για τη διεγείρουσα συνάρτηση $f(t)$ εάν $f(t) = 0, t < 0$.

Ευστάθεια Απόκρισης

Μία σημαντική ιδιότητα κάθε κυκλώματος και κάθε συστήματος είναι η **ευστάθειά** του. Υπάρχουν πολλοί ορισμοί της ευστάθειας που καλύπτουν και μη γραμμικά συστήματα. Εδώ δεν θα ασχοληθούμε με τους ορισμούς αυτούς, αλλά θα παρατηρήσουμε ότι ένα σύστημα είναι **ασταθές** όταν η απόκριση κάποιας μεταβλητής αποκλίνει από το σημείο ισορροπίας και αυξάνει διαρκώς με το χρόνο. Κάτι τέτοιο έχει πρακτική σημασία διότι ανεξέλεγκτη αύξηση τάσεων και ρευμάτων συνεπάγεται καταστροφή ενός κυκλώματος και πιθανόν και άλλες βλάβες.

Στα προηγούμενα είδαμε ότι η λύση της ομογενούς εξίσωσης, ή η απόκριση σε αρχικές συνθήκες, αποτελείται από το άθροισμα εκθετικών συναρτήσεων της μορφής $ce^{\lambda t}$. Προκειμένου η συνάρτηση αυτή να μην απειριστεί, πρέπει το πραγματικό μέρος της παραμέτρου λ να είναι αρνητικός πραγματικός αριθμός, δηλαδή

$$\mathrm{Re}(\lambda) < 0 \tag{7-34}$$

Εάν αυτή η σχέση ισχύει για όλες τις ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης (7-21) τότε το κύκλωμα είναι **ευσταθές**. Εάν ισχύει ότι

$$\mathrm{Re}(\lambda) = 0 \tag{7-35}$$

τότε το κύκλωμα είναι **οριακά ευσταθές**, ενώ εάν έστω και για μία ρίζα λ ισχύει ότι

$$\mathrm{Re}(\lambda) > 0 \tag{7-36}$$

το κύκλωμα είναι **ασταθές**.

7-4 Απόκριση Κυκλωμάτων 1ης Τάξης

Στο εδάφιο αυτό εξετάζουμε με λεπτομέρεια την απόκριση κυκλωμάτων πρώτης τάξης. Τα κυκλώματα πρώτης τάξης είναι τα πλέον στοιχειώδη κυκλώματα με δυναμική συμπεριφορά και περιέχουν **ένα** μόνο **ανεξάρτητο** στοιχείο συσσώρευσης ενέργειας, δηλαδή ένα ανεξάρτητο πυκνωτή ή ένα ανεξάρτητο επαγωγέα. Όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, η ανεξαρτησία ή όχι ενός στοιχείου συσσώρευσης ενέργειας μπορεί να διαπιστωθεί εύκολα με κατασκευή του κανονικού δένδρου του κυκλώματος.

Απόκριση σε Αρχικές Συνθήκες

Κατ' αρχήν, εξετάζουμε την απόκριση ενός κυκλώματος πρώτης τάξης σε αρχικές συνθήκες, δηλαδή από μία αρχική κατάσταση όπου ο πυκνωτής είναι φορτισμένος ή όπου ο επαγωγέας διαρρέεται από ρεύμα, μέχρι την τελική κατάσταση ισορροπίας. Κατά τη διάρκεια αυτής της απόκρισης δεν υπάρχουν πηγές, διότι σε αυτή την περίπτωση θα είχαμε διέγερση και απόκριση σε εισόδους.

Η γενική μορφή της ομογενούς εξίσωσης ενός κυκλώματος πρώτης τάξης γράφεται

$$\frac{dx(t)}{dt} + ax(t) = 0 \tag{7-37}$$

με μία αρχική συνθήκη

$$x(0) = x_0 \tag{7-38}$$

Η Εξ. (7-37) γράφεται και με την εξής συνήθη μορφή

$$\tau \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = 0 \tag{7-39}$$

όπου τ είναι η **χρονική σταθερά** του κυκλώματος και έχει μονάδες χρόνου. Η μορφή (7-39) βρίσκει μεγαλύτερη εφαρμογή, γιατί όπως θα δούμε, η ταχύτητα απόκρισης του κυκλώματος εξαρτάται αποκλειστικά από τη χρονική σταθερά.

Η χαρακτηριστική εξίσωση που αντιστοιχεί στην Εξ. (7-39) γράφεται

$$\tau\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda + \frac{1}{\tau} = 0 \tag{7-40}$$

και επομένως, η μοναδική ρίζα είναι

$$\lambda = -\frac{1}{\tau} \tag{7-41}$$

Η λύση της ομογενούς έχει τη μορφή

$$x(t) = ce^{\lambda t} = ce^{-\frac{t}{\tau}} \tag{7-42}$$

Οι αρχικές συνθήκες $x(0) = x_0$ και η Εξ. (7-42) δίνουν την τελική απόκριση στις αρχικές συνθήκες

$$x(t) = x_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{7-43}$$

που είναι μία εκθετική συνάρτηση που ξεκινά από την αρχική συνθήκη και φθίνει με τελικό προορισμό το μηδέν εάν τ > 0. Σε αυτή την περίπτωση, το κύκλωμα είναι ευσταθές. Εάν τ < 0, η απόκριση απειρίζεται, δηλαδή το κύκλωμα είναι ασταθές. Εάν τέλος, τ = 0, τότε το κύκλωμα είναι οριακά ευσταθές και η απόκριση παραμένει καθηλωμένη στις αρχικές συνθήκες.

Η χρονική σταθερά σε ηλεκτρικά κυκλώματα είναι ένας θετικός αριθμός που κυμαίνεται μεταξύ μερικών ms και μερικών s, χωρίς όμως να αποκλείονται και χρονικές σταθερές έξω από τα όρια αυτά. Σε απλά κυκλώματα R-C ή R-L, η σταθερά αυτή είναι ίση με RC ή L/R.

Προκειμένου να αποτυπωθεί η απόκριση που περιγράφεται από την Εξ. (7-43), μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει μία υπολογιστική μηχανή τσέπης ή να καταφύγει σε υπολογιστή. Συνήθως όμως, η σχέση αυτή αποτυπώνεται προσεγγιστικά (με το χέρι), με τη βοήθεια των εξής χαρακτηριστικών

Χάραξη Απόκρισης Κυκλώματος Πρώτης Τάξης

1. Η απόκριση ξεκινά από την αρχική συνθήκη.

2. Η κλίση της απόκρισης σε χρόνο t=0 είναι ίση με –x(0)/τ.

3. Είναι σκόπιμο να υπολογίζουμε την απόκριση σε χρόνους που είναι πολλαπλάσια της χρονικής σταθεράς, γιατί σε κάθε τέτοιο χρόνο, η κλίση της απόκρισης είναι αυτή που δίδεται στο σημείο 2, αφού αντικαταστήσουμε την αρχική συνθήκη x(0) με την τιμή που έχει η απόκριση στο χρόνο που εξετάζουμε. Ο Πίνακας 7-2 δίδει τιμές της απόκρισης σε κανονικοποιημένη μορφή ως συνάρτηση του χρόνου. Παρατηρείστε ότι σε μία χρονική σταθερά, η απόκριση βρίσκεται στο 37% της αρχικής τιμής.

4. Σε περίπου 4 χρονικές σταθερές, η απόκριση έχει μειωθεί στο 98% της αρχικής τιμής, βλ. τελευταία κολόνα του Πίνακα 7-2. Επειδή η απόκριση χρειάζεται άπειρο χρόνο για να μηδενιστεί τελείως, το όριο 98% θεωρείται για πρακτικούς λόγους ότι αντιπροσωπεύει το μηδέν ή την κατάσταση ισορροπίας.

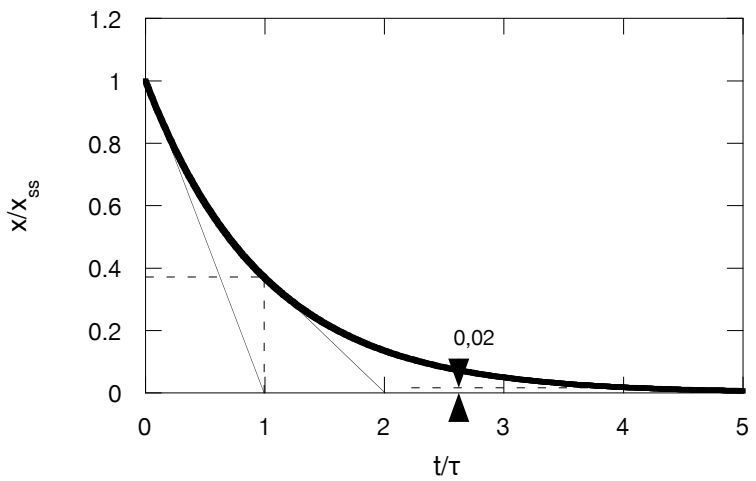
Πίνακας 7-2. Κανονικοποιημένη απόκριση κυκλώματος πρώτης τάξης.

Χρόνος	t/τ	$x(t)/x_0 = e^{-\frac{t}{\tau}}$	$x_\beta(t)/x_0 = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$
0	0	1,0000	0,0000
τ	1	0,3679	0,6321
2τ	2	0,1353	0,8647
3τ	3	0,0498	0,9502
4τ	4	0,0183	0,9817

Το Σχ. 7-8 παριστά την κανονικοποιημένη απόκριση σε αρχικές συνθήκες. Αυτό το σχήμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την αποτύπωση οποιασδήποτε απόκρισης, ανεξάρτητα από αρχικές συνθήκες ή από χρονικές σταθερές. Μία ενδιαφέρουσα παρατήρηση είναι ότι όσο η χρονική σταθερά αυξάνει, τόσο αυξάνει και ο πραγματικός χρόνος που θα περάσει έως ότου η απόκριση εισέλθει στη ζώνη του 2% της αρχικής τιμής, δηλαδή πρακτικά να μηδενιστεί. Επομένως, μεγάλη χρονική σταθερά συνεπάγεται αργή απόκριση και αργό κύκλωμα, ενώ μικρή χρονική σταθερά συνεπάγεται γρήγορο κύκλωμα.

Ο χρόνος κατά τον οποίο η απόκριση έχει μειωθεί κατά 98% της αρχικής τιμής λέγεται **χρόνος αποκατάστασης** t_s (98%), και χρησιμοποιείται για σύγκριση της ταχύτητας απόκρισης κυκλωμάτων, όπως ακριβώς και η χρονική σταθερά. Λόγω του Πίνακα 7-2, ισχύει ότι

$$t_s = 4\tau \tag{7-44}$$

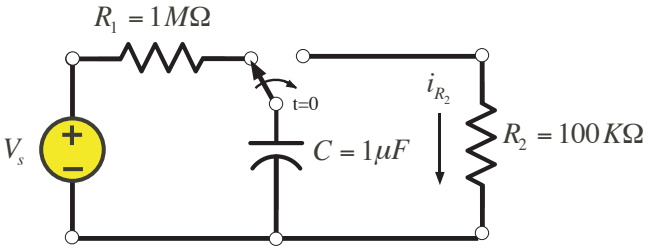


Σχήμα 7-8. Κανονικοποιημένη απόκριση σε αρχικές συνθήκες κυκλώματος 1ης τάξης.

Παράδειγμα 7-5

Το Σχ. 7-9 παριστά το κύκλωμα τροφοδοσίας λυχνίας ξένου του φλας φωτογραφικής μηχανής. Η στήλη φορτώνει τον πυκνωτή, ο οποίος εκφορτίζεται στιγμιαία μέσω της λυχνίας όταν ο διακόπτης αλλάξει θέση. Να υπολογισθεί και να σχεδιασθεί το ρεύμα που

διαρρέει τη λυχνία αφού κλείσει ο διακόπτης. Τι αποτέλεσμα θα είχε ο διπλασιασμός της χωρητικότητας του πυκνωτή;



Σχήμα 7-9. Κύκλωμα φλας φωτογραφικής μηχανής.

Λύση

Ο πυκνωτής φορτίζεται για ένα διάστημα και αφού η φόρτιση τελειώσει, το φλας είναι έτοιμο για λειτουργία. Υποθέτουμε λοιπόν ότι ο πυκνωτής έχει ισορροπήσει πριν ο διακόπτης μεταφερθεί δεξιά. Σε αυτή την κατάσταση, ο πυκνωτής δρα ως ανοικτοκύκλωμα, επομένως η τάση του είναι ίση με την τάση της πηγής. Άρα

$$v_c(0^-) = 5V$$

Λόγω της απαίτησης για συνέχεια της τάσης, μετά τη μεταφορά του διακόπτη η τάση του πυκνωτή παραμένει η ίδια, επομένως έχουμε

$$v_c(0^-) = v_c(0^+) = v_c(0) = v_{c0} = 5V$$

Με μία απλή εφαρμογή των ΝΡΚ και ΝΤΚ στο δεξιό βρόχο και αφού ο διακόπτης έχει μετακινηθεί δεξιά, έχουμε

$$\frac{d}{dt}v_c(t) = \frac{1}{C}i_C(t) = \frac{1}{C}i_{R_2}(t) = -\frac{1}{R_2C}v_c(t) \Rightarrow$$

$$R_2C\frac{d}{dt}v_c(t) + v_c(t) = 0 \Rightarrow$$

$$\tau\frac{d}{dt}v_c(t) + v_c(t) = 0$$

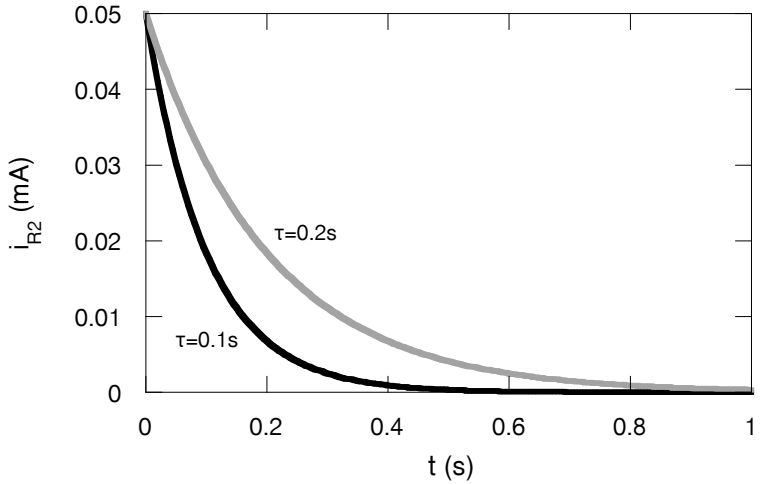
δηλαδή έχουμε ένα κύκλωμα πρώτης τάξης με χρονική σταθερά $\tau = R_2C = 0{,}1s$. Η αναλυτική μορφή της απόκρισης δίδεται από την Εξ. (7-43)

$$v_c(t) = 5e^{-\frac{t}{0{,}1}}$$

ενώ το ρεύμα που διαρρέει τον πυκνωτή και την αντίσταση 2 είναι

$$i_{R_2}(t) = \frac{1}{10^5}5e^{-\frac{t}{0{,}1}} = 0{,}05e^{-\frac{t}{0{,}1}}mA$$

Η απόκριση αυτή παρουσιάζεται στο Σχ. 7-10.



Σχήμα 7-10. Απόκριση ρεύματος της λυχνίας του κυκλώματος του Σχ. 7-9.

Εάν η χωρητικότητα του πυκνωτή διπλασιασθεί, τότε η νέα χρονική σταθερά θα είναι $\tau = R_2 C = 0{,}2s$. Επειδή αυτή η σταθερά είναι διπλάσια της αρχικής, στην περίπτωση αυτή θα χρειασθεί διπλάσιος χρόνος μέχρι να εκφορτισθεί ο πυκνωτής.

Επίσης, στην ίδια χρονική στιγμή, θα παρέχει περισσότερο φως διότι η τάση του και επομένως και το ρεύμα που διαρρέει την αντίσταση θα είναι μεγαλύτερο. Κάτι τέτοιο θα οδηγήσει σε υπερφωτισμό του φωτογραφιζόμενου αντικειμένου. ■

Απόκριση σε Εισόδους

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, η απόκριση ενός κυκλώματος σε μία είσοδο εξαρτάται από την είσοδο. Επειδή οι είσοδοι είναι πάρα πολλές, δεν είναι δυνατόν να μελετήσουμε τα αποτελέσματα κάθε εισόδου, αλλά θα αρκεστούμε σε υπολογισμό της κυριότερης εισόδου, της βηματικής. Η απόκριση σε άλλες εισόδους μπορεί να υπολογισθεί με χρήση των ιδιοτήτων των γραμμικών κυκλωμάτων ή με απ' ευθείας εφαρμογή της γενικής μεθόδου του Εδαφίου 7-2. Ειδικό ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι ημιτονοειδείς είσοδοι που θα μας απασχολήσουν διεξοδικά στο επόμενο κεφάλαιο.

Η γενική μορφή μιας διαφορικής εξίσωσης όπου η διεγείρουσα συνάρτηση είναι μία μοναδιαία βηματική είσοδος $u_s(t)$ πολλαπλασιασμένη επί μία σταθερά K, είναι

$$\tau \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = u_s(t)K \tag{7-45}$$

Πολλές φορές για απλότητα παραλείπουμε τη $u_s(t)$ και γράφουμε

$$\tau \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = K \tag{7-46}$$

όπου η Εξ. (7-46) ισχύει για $t \geq 0$.

Εάν υποθέσουμε ότι το κύκλωμα είναι ευσταθές, δηλαδή $\tau > 0$, τότε η απόκριση μετά κάποιο χρόνο θα ισορροπήσει στην τι**μή μόνιμης κατάστασης**, που υπολογίζεται αν μηδενισθεί η παράγωγος στην Εξ. (7-46). Στην περίπτωση αυτή έχουμε

$$x_{ss} = x(\infty) = K \tag{7-47}$$

και επομένως, η Εξ. (7-46) μπορεί να γραφεί ως

$$\tau \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = x_{ss} \tag{7-48}$$

Όπως είδαμε σε προηγούμενο εδάφιο, η μερική λύση αυτής της εξίσωσης είναι μία σταθερά και μάλιστα αυτή είναι η $x_{ss} = K$. Άρα, η γενική λύση της Εξ. (7-48) είναι

$$x(t) = ce^{-\frac{t}{\tau}} + x_{ss} \tag{7-49}$$

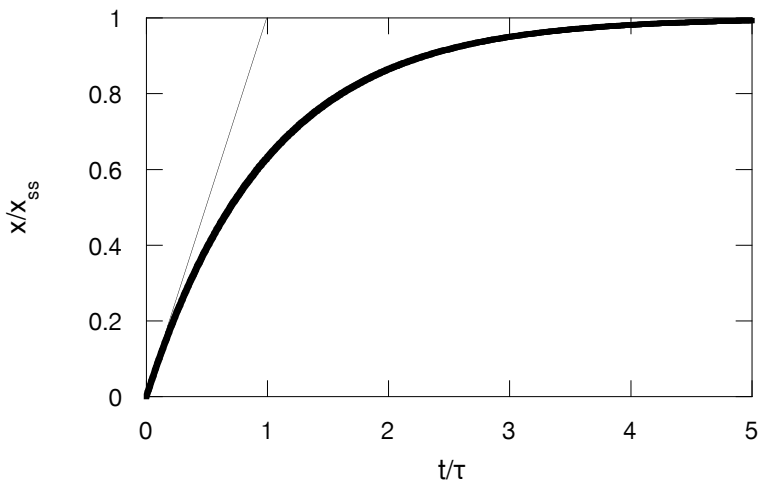
Εάν υποθέσουμε ότι η αρχική συνθήκη είναι $x(0) = 0$, τότε

$$0 = c + x_{ss} \Rightarrow c = -x_{ss} \tag{7-50}$$

Συνεπώς η γενική λύση είναι

$$x(t) = x_{ss}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \tag{7-51}$$

και παρουσιάζεται στο Σχ. 7-11 σε κανονικοποιημένη μορφή.



Σχήμα 7-11. Απόκριση κυκλώματος 1ης τάξης σε βηματική είσοδο.

Για τη χάραξη της απόκρισης μπορούμε να ακολουθήσουμε απλές οδηγίες ανάλογες με αυτές που χρησιμοποιήσαμε για τη χάραξη της απόκρισης σε αρχική συνθήκη.

Πράγματι, η απόκριση αρχίζει από την αρχική τιμή και οδηγείται προς την τιμή της μόνιμης κατάστασης. Η κλίση της καμπύλης στην αρχή του χρόνου είναι x_{ss}/τ, η απόκριση φθάνει το 63% της τιμής στη μόνιμη κατάσταση μέσα σε μία χρονική σταθερά, ενώ σε τέσσερις χρονικές σταθερές έχει φθάσει στο 98% της τιμής της μόνιμης κατάστασης, δηλαδή πρακτικά η απόκριση δεν αλλάζει πλέον. Ο χρόνος αποκατάστασης στην περίπτωση αυτή ορίζει το χρόνο που χρειάζεται ώστε η απόκριση να βρεθεί μέσα στην περιοχή του 98% της τιμής της μόνιμης κατάστασης και είναι

$$t_s = 4\tau \tag{7-52}$$

Εκτός από τη χάραξη της απόκρισης, γνώση της αναλυτικής μορφής της καμπύλης απόκρισης μας επιτρέπει να ακολουθήσουμε αντίστροφη πορεία. Για παράδειγμα, εάν έχουμε ένα πυκνωτή άγνωστης χωρητικότητας, τότε μπορούμε να τον συνδέσουμε σε ένα κύκλωμα R-C με γνωστή αντίσταση και να προσδιορίσουμε πειραματικά την απόκριση. Από την κλίση της καμπύλης αυτής στην αρχή του χρόνου, μπορούμε να υπολογίσουμε τη χρονική σταθερά και από αυτή την τιμή της άγνωστης χωρητικότητας.

Παράδειγμα 7-6

Να ευρεθεί το ρεύμα που φορτίζει τον πυκνωτή του φλας του Σχ. 7-9 όταν μετά από εκφόρτισή του, ο διακόπτης μετακινηθεί αριστερά. Πόσο χρόνο χρειάζεται το φλας για να φορτιστεί; Πόσο για να εκφορτισθεί;

Λύση

Αφού ανάψει το φλας, ο πυκνωτής είναι αφόρτιστος, άρα

$$v_c(0^-) = 0V$$

Η απαίτηση για συνέχεια της τάσης δίδει

$$v_c(0^-) = v_c(0^+) = v_c(0) = v_{c0} = 0V$$

Με μία απλή εφαρμογή των ΝΡΚ και ΝΤΚ στον αριστερό βρόχο και αφού ο διακόπτης έχει μετακινηθεί αριστερά, έχουμε

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}v_C(t) = \frac{1}{C}i_C(t) = \frac{1}{C}i_R(t) = \frac{1}{R_1C}v_{R_1}(t) \Rightarrow \\
&\frac{d}{dt}v_C(t) = \frac{1}{R_1C}\left(v_s - v_C(t)\right) \Rightarrow \\
&R_1C\frac{d}{dt}v_C(t) + v_C(t) = v_s \Rightarrow \\
&\tau'\frac{d}{dt}v_C(t) + v_C(t) = v_s
\end{aligned}$$

δηλαδή ένα κύκλωμα πρώτης τάξης με χρονική σταθερά $\tau' = R_1C = 1s$, όπου R_1 είναι η εσωτερική αντίσταση της πηγής (στήλης). Η αναλυτική μορφή της απόκρισης δίδεται από την Εξ. (7-51)

$$v_C(t) = v_{C,ss}(1 - e^{-t})$$

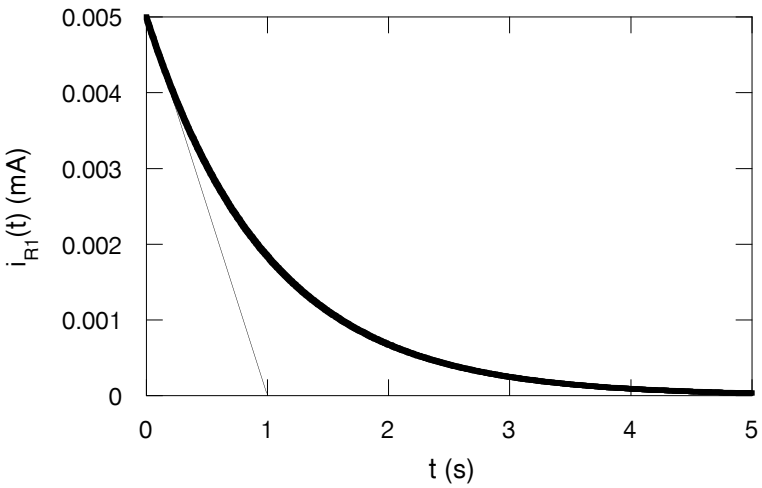
όπου η σταθερά $v_{C,ss}$ μπορεί να βρεθεί εύκολα από τη διαφορική εξίσωση, μηδενίζοντας την παράγωγο. Προφανώς, είναι ίση με την τάση της πηγής και έχουμε

$$v_C(t) = 5(1 - e^{-t})\,V$$

Το ρεύμα που διαρρέει τον πυκνωτή και την εσωτερική αντίσταση της πηγής υπολογίζεται με χρήση της εξίσωσης στοιχείου του πυκνωτή, δηλαδή με διαφόριση της προηγούμενης εξίσωσης. Το αποτέλεσμα είναι το εξής

$$i_{R_1}(t) = \frac{5}{10^6}e^{-t} = 0{,}005e^{-t}\ mA$$

Παρατηρούμε ότι αυτό το ρεύμα είναι 10 φορές μικρότερο από το ρεύμα εκφόρτισης, ενώ η χρονική σταθερά φόρτισης είναι 10 φορές μεγαλύτερη από τη χρονική σταθερά εκφόρτισης. Επομένως, η φόρτιση του φλας απαιτεί περισσότερο χρόνο και βεβαίως απορροφά λιγότερο ρεύμα έτσι ώστε να μην πέφτει η τάση της στήλης. Συγκεκριμένα, η φόρτιση απαιτεί χρόνο $4\tau' = 4s$, ενώ η εκφόρτιση χρόνο $4\tau = 0{,}4s$. Η απόκριση του ρεύματος φόρτισης απεικονίζεται στο Σχ. 7-12.



Σχήμα 7-12. Απόκριση ρεύματος της λυχνίας ξένου του κυκλώματος του Σχ. 7-9.

Όπως αναμέναμε, στην κατάσταση ισορροπίας του κυκλώματος, το ρεύμα που διέρχεται από αυτό είναι μηδέν και ο πυκνωτής δρα ως ανοικτοκύκλωμα.

Ως άσκηση, υπολογίστε την τάση της πραγματικής πηγής κατά Thevenin (δηλαδή της πηγής με την αντίσταση σε σειρά) και εξετάστε ποια είναι η πτώση της τάσης της στήλης κατά τη φόρτιση του πυκνωτή. ■

Παράδειγμα 7-7

Να ευρεθεί αναλυτικά η απόκριση ενός κυκλώματος 1ης τάξης σε μία μοναδιαία κρουστική είσοδο,

$$\tau \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = \delta(t)$$

όταν $x(0) = 0$.

Λύση

Χρησιμοποιούμε την ιδιότητα της διαφόρισης του Εδαφίου 7-3 και την παρατήρηση ότι η κρουστική συνάρτηση είναι η παράγωγος της βηματικής συνάρτησης. Επομένως, για να βρούμε την απόκριση στη κρουστική συνάρτηση, αρκεί να βρούμε την απόκριση σε μία μοναδιαία είσοδο και να παραγωγίσουμε το αποτέλεσμα. Έτσι, η απόκριση που ζητάμε, είναι

$$x(t) = \frac{d}{dt}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

έχει δηλαδή τη μορφή της απόκρισης σε αρχικές συνθήκες. Παρατηρείστε ότι σε χρόνο μηδέν, η απόκριση δεν είναι συνεχής, διότι

$$x(0^-) = 0$$
$$x(0^+) = \frac{1}{\tau}$$

Και αυτή η απόκριση οδηγείται στο μηδέν σε τέσσερις χρονικές σταθερές. ■

7-5 Απόκριση Κυκλωμάτων 2ης Τάξης

Τα κυκλώματα δεύτερης τάξης περιέχουν δύο ανεξάρτητα στοιχεία συσσώρευσης ενέργειας και περιγράφονται είτε από εξισώσεις κατάστασης δεύτερης τάξης, είτε από μία διαφορική εξίσωση εισόδου-εξόδου δεύτερης τάξης. Μερικά από αυτά τα κυκλώματα έχουν ομαλή απόκριση, ενώ άλλα παρουσιάζουν ταλαντώσεις. Εάν το κύκλωμα περιέχει ένα πυκνωτή και ένα επαγωγέα, τότε μπορεί να παρατηρηθούν ταλαντώσεις τάσης ή ρεύματος κατά τις οποίες ενέργεια μεταφέρεται από το ένα στοιχείο συσσώρευσης ενέργειας στο άλλο. Το αν θα υπάρχουν ταλαντώσεις ή όχι εξαρτάται από το πόση ενέργεια αφαιρείται από το κύκλωμα λόγω των αντιστάσεων.

Στη συνέχεια, θα εξετάσουμε την απόκριση των κυκλωμάτων αυτών σε αρχικές συνθήκες και εισόδους.

Απόκριση σε Αρχικές Συνθήκες

Η γενική μορφή της διαφορικής εξίσωσης ενός κυκλώματος 2ας τάξης χωρίς διεγείρουσα συνάρτηση είναι

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + a_1\frac{dx(t)}{dt} + a_0x(t) = 0 \tag{7-53}$$

με δύο αρχικές συνθήκες

$$x(0) = x_0\,,\ \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \tag{7-54}$$

Παρατήρηση. Σημειώστε ότι οι αρχικές συνθήκες μπορεί να μην είναι γνωστές στη μορφή της Εξ. (7-54), αλλά μπορεί να δίδονται ως αρχικές συνθήκες διαφόρων μεταβλητών, για παράδειγμα, ως αρχική τάση ενός πυκνωτή και αρχικό ρεύμα ενός επαγωγέα. Στην περίπτωση όπου το κύκλωμα περιγράφεται από μεταβλητές κατάστασης αυτές οι αρχικές συνθήκες δεν παρουσιάζουν κανένα πρόβλημα, αντιθέτως μάλιστα είναι ευπρόσδεκτες.

Εάν λοιπόν οι αρχικές συνθήκες δεν είναι στη μορφή της Εξ. (7-54), τότε χρησιμοποιούμε τους ΝΤΚ και ΝΡΚ έτσι ώστε να υπολογίσουμε τις αρχικές συνθήκες που μας χρειάζονται. Προκειμένου για ένα κύκλωμα που περιγράφεται από μεταβλητές κατάστασης, και για το οποίο οι αρχικές συνθήκες αντιστοιχούν σε μεταβλητές εξόδου και όχι σε μεταβλητές κατάστασης, επίσης χρησιμοποιούμε τους ΝΤΚ και ΝΡΚ. Σε αυτή όμως την περίπτωση, οι εξισώσεις που χρειάζονται είναι στη διάθεσή μας γιατί έχουν ήδη χρησιμοποιηθεί στην κατάστρωση των εξισώσεων.

Συνήθως, η Εξ. (7-53) γράφεται στην εξής μορφή

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dx(t)}{dt} + \omega_n{}^2 x(t) = 0 \tag{7-55}$$

που είναι χρήσιμη, ιδιαίτερα όταν η απόκριση υπόκειται σε ταλαντώσεις. Η σταθερά ζ λέγεται **λόγος απόσβεσης**, ενώ η σταθερά ω_n λέγεται **φυσική συχνότητα** ή **ιδιοσυχνότητα** του κυκλώματος, για λόγους που θα δούμε ευθύς αμέσως.

Για να προσδιορίσουμε την απόκριση της ομογενούς εξίσωσης (7-53), γράφουμε τη χαρακτηριστική εξίσωση

$$\lambda^2 + 2\zeta\omega_n\lambda + \omega_n{}^2 = 0 \tag{7-56}$$

και βρίσκουμε τις ρίζες της

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \\ \lambda_2 &= -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \end{aligned} \tag{7-57}$$

Συνήθως, οι ρίζες αυτές είναι μιγαδικές. Ειδικότερα, μπορούν να είναι φανταστικές, μιγαδικές, ή πραγματικές ανάλογα με την τιμή του ζ. Για το λόγο αυτό εξετάζουμε τέσσερις περιπτώσεις.

(α) $\zeta > 1$, **υπέρ-απόσβεση**. Στην περίπτωση αυτή έχουμε δύο πραγματικές και διάφορες ρίζες και η απόκριση γράφεται ως

$$x(t) = x_o(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \tag{7-58}$$

ή ακόμη και ως

$$x(t) = x_o(t) = c_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} + c_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}} \tag{7-59}$$

όπου τ_1, τ_2 είναι θετικές χρονικές σταθερές, ίσες με τον αρνητικό αντίστροφο των ριζών της χαρακτηριστικής εξίσωσης. Η απόκριση αυτή είναι η **επαλληλία** δύο εκθετικών συναρτήσεων με κατάλληλο συντελεστή βαρύτητας και επομένως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο χάραξης της απόκρισης ενός κυκλώματος πρώτης τάξης για κάθε ένα από τα δύο εκθετικά. Η απόκριση αυτή για ορισμένα ζ και μηδενική αρχική κλίση, δίδεται στο Σχ. 7-13.

Μετά από αυτές τις παρατηρήσεις, είναι φανερό ότι στην περίπτωση όπου $\zeta > 1$, δεν έχουμε ταλαντώσεις στην απόκριση. Αυτό συμβαίνει γιατί στο κύκλωμα υπάρχει μεγάλη απόσβεση ή μεγάλη απορρόφηση ενέργειας από αντιστάσεις.

Όπως και στην περίπτωση των κυκλωμάτων πρώτης τάξης, έτσι και εδώ μας ενδιαφέρει να γνωρίζουμε πόσο γρήγορη είναι η απόκριση ενός κυκλώματος. Με καλή προσέγγιση μπορούμε να πούμε ότι η απόκριση θα μηδενισθεί όσο γρήγορα μηδενισθεί η απόκριση του πλέον αργού εκθετικού. Επομένως ισχύει

$$t_s = 4\max(\tau_1, \tau_2) \tag{7-60}$$

Δηλαδή, ο **χρόνος αποκατάστασης** t_s (98%) είναι ίσος προς τέσσερις αργές χρονικές σταθερές.

Παρατηρούμε επίσης ότι αν μία από τις δύο ρίζες είναι πολύ μικρή σε σχέση με την άλλη, ή ισοδύναμα όταν το ζ είναι πολύ μεγάλο, τότε το εκθετικό που αντιστοιχεί στη μικρή ρίζα έχει μεγάλη χρονική σταθερά και συνεχίζει να είναι μη μηδενικό όταν το άλλο εκθετικό έχει μηδενισθεί. Η ρίζα αυτή λέγεται **κυρίαρχη ρίζα** και η απόκρισή της είναι κατά προσέγγιση η απόκριση του κυκλώματος. Σε αυτή την περίπτωση, το κύκλωμα συμπεριφέρεται ως πρώτης τάξης, αν και είναι δευτέρας.

(β) $\zeta = 1$, **κρίσιμη απόσβεση**. Στην περίπτωση αυτή, έχουμε δύο πραγματικές και ίσες ρίζες.

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -\zeta\omega_n \tag{7-61}$$

Όπως αναφέραμε στο Εδάφιο 7-2, Εξ. (7-24), όταν δύο ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι ίσες, δηλαδή όταν έχουμε **πολλαπλότητα** ίση με 2, τότε η λύση της ομογενούς εξίσωσης είναι

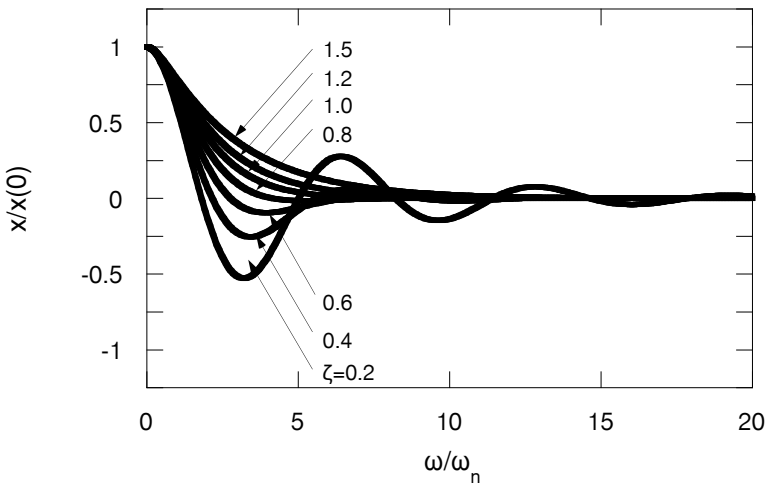
$$x(t) = x_o(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t} \tag{7-62}$$

Η λύση αυτή δεν περιλαμβάνει ταλαντώσεις εφόσον και πάλι αποτελείται από επαλληλία εκθετικών συναρτήσεων (η μία πολλαπλασιασμένη επί το χρόνο). Η απόκριση αυτή για σταθερή φυσική συχνότητα είναι η πλέον γρήγορη που μπορεί να υπάρξει, χωρίς ταλαντώσεις, βλ. Σχ. 7-13.

Ο χρόνος αποκατάστασης για $\zeta = 1$ δίδεται από τη σχέση

$$t_s = \frac{6}{\lambda} = 6\tau \tag{7-63}$$

δηλαδή είναι περίπου ίσος με 6 χρονικές σταθερές και όχι 4, λόγω του ότι ο χρόνος πολλαπλασιάζει το δεύτερο εκθετικό.



Σχήμα 7-13. Κανονικοποιημένη απόκριση αρχικών συνθηκών κυκλώματος 2ας τάξης. Η απόκριση ξεκινά από την αρχική συνθήκη με μηδενική κλίση.

(γ) $1 > \zeta > 0$, **υπό-απόσβεση**. Στην περίπτωση αυτή, το κύκλωμα παρουσιάζει μικρή απόσβεση και όπως φαίνεται στο Σχ. 7-13, εμφανίζονται ταλαντώσεις. Οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι πλέον συζυγείς μιγαδικές. Αυτό συμβαίνει επειδή οι

συντελεστές της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι πραγματικοί αριθμοί. Οι μιγαδικές ρίζες είναι

$$\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \tag{7-64}$$

και γράφονται ως

$$\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_d \tag{7-65}$$

όπου ω_d λέγεται **φυσική συχνότητα με απόσβεση** και είναι συνήθως η συχνότητα που μπορούμε να παρατηρήσουμε πειραματικά, μια και όλα τα κυκλώματα παρουσιάζουν κάποια μικρή έστω απόσβεση. Η ω_d δίδεται από τη σχέση

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \tag{7-66}$$

Η απόκριση του κυκλώματος είναι και πάλι

$$x(t) = x_o(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \tag{7-67}$$

αλλά σε αυτή την περίπτωση, οι συντελεστές c_1, c_2, είναι μιγαδικοί αριθμοί. Για να έχουμε απόκριση που περιγράφεται από μία εξίσωση με συντελεστές πραγματικούς αριθμούς, χρησιμοποιούμε τις σχέσεις του Euler, Εξ. (7-7). Πράγματι έχουμε

$$\begin{aligned}
&x(t) = c_1 e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos(\omega_d t) + j\sin(\omega_d t)\right) + c_2 e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos(\omega_d t) - j\sin(\omega_d t)\right) \Rightarrow \\
&x(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left(c_1 + c_2\right)\cos(\omega_d t) + e^{-\zeta\omega_n t} j\left(c_1 - c_2\right)\sin(\omega_d t) \Rightarrow \\
&x(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left(c_1^* \cos(\omega_d t) + c_2^* \sin(\omega_d t)\right)
\end{aligned} \tag{7-68}$$

όπου οι σταθερές c_1^*, c_2^* αντικατέστησαν άλλες σταθερές. Η διαφορά όμως είναι ότι οι σταθερές c_1^*, c_2^*, είναι πλέον πραγματικές και έτσι η Εξ. (7-68) μας δίδει την απόκριση όταν $1 > \zeta > 0$ ως συνάρτηση ημιτονικών όρων.

Παρατηρείστε επίσης ότι η Εξ. (7-68) αποτελείται από ένα εκθετικό όρο που πολλαπλασιάζει ένα άθροισμα ημιτονοειδών και επομένως φραγμένων συναρτήσεων. Το πόσο γρήγορα λοιπόν θα φθάσει η απόκριση που περιγράφεται από την Εξ. (7-68) στο μηδέν εξαρτάται από τον εκθετικό όρο. Ο όρος αυτός αποτελεί μία **περιβάλλουσα συνάρτηση** της απόκρισης διότι

$$ce^{-\zeta\omega_n t} \geq |x(t)| \tag{7-69}$$

όπου c είναι μία θετική σταθερά. Επομένως, ο χρόνος αποκατάστασης της απόκρισης είναι περίπου ίσος με το χρόνο αποκατάστασης της εκθετικής συνάρτησης, δηλαδή

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} \tag{7-70}$$

Η απόκριση για ορισμένα ζ με $1 > \zeta > 0$ παρουσιάζεται στο Σχ. 7-13.

(δ) $\zeta = 0$, **καθαρή ταλάντωση**. Στην περίπτωση αυτή, ο εκθετικός όρος της Εξ. (7-68) είναι μονάδα, ενώ η φυσική συχνότητα με απόσβεση ισούται με τη φυσική συχνότητα (ιδιοσυχνότητα) του κυκλώματος. Επομένως, η απόκριση είναι

$$x(t) = c_1^* \sin(\omega_n t) + c_2^* \cos(\omega_n t) \tag{7-71}$$

Η σχέση αυτή μπορεί να γραφεί ισοδύναμα ως

$$x(t) = X \sin(\omega_n t + \phi) \tag{7-72}$$

με

$$\begin{aligned} \phi &= \tan^{-1}\left(\frac{c_2^*}{c_1^*}\right) \\ X &= \frac{c_1^*}{\sin\phi} \end{aligned} \tag{7-73}$$

Η Εξ. (7-73) αποδεικνύει ότι στην περίπτωση αυτή έχουμε καθαρή ταλάντωση με πλάτος X και φάση ϕ που εξαρτώνται από τις αρχικές συνθήκες. Προφανώς, όταν $\zeta = 0$ ο χρόνος αποκατάστασης είναι άπειρος (δηλαδή η απόκριση δεν μηδενίζεται ποτέ).

Τέλος, στην περίπτωση όπου $\zeta < 0$, το κύκλωμα είναι ασταθές και η απόκρισή του αυξάνει με το χρόνο χωρίς όριο, με ή χωρίς ταλαντώσεις.

Απόκριση σε Εισόδους

Θα εξετάσουμε την πλέον σημαντική απόκριση που προκύπτει όταν η διεγείρουσα συνάρτηση είναι μία βηματική είσοδος $Ku_s(t)$. Η γενική μορφή μιας διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης με αυτή τη διεγείρουσα συνάρτηση είναι

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dx(t)}{dt} + \omega_n{}^2 x(t) = u_s(t)K \tag{7-74}$$

Για $t > 0$ γράφουμε

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dx(t)}{dt} + \omega_n{}^2 x(t) = K \tag{7-75}$$

Η γενική λύση κατά τα γνωστά είναι

$$\begin{aligned} x(t) &= x_o(t) + x_\mu(t) \Rightarrow \\ x(t) &= c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + x_\mu(t) \end{aligned} \tag{7-76}$$

όπου υποθέσαμε ότι η χαρακτηριστική εξίσωση έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες, δηλαδή ότι $\zeta > 1$. Η μερική λύση βρίσκεται με τη βοήθεια του Πίνακα 7-1 και είναι μία σταθερά x_μ. Εισάγοντας αυτή τη λύση στην Εξ. (7-75) οι παράγωγοι μηδενίζονται και έχουμε

$$\omega_n{}^2 x_\mu = K \Rightarrow x_\mu = \frac{K}{\omega_n{}^2} = x_{ss} \tag{7-77}$$

Παρατηρούμε ότι η μερική λύση είναι στην πραγματικότητα η τιμή μόνιμης κατάστασης της απόκρισης, όπου βεβαίως υποθέτουμε ότι η ομογενής λύση είναι ευσταθής, βλ. Εξ. (7-34). Η Εξ. (7-77) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό της x_{ss} όταν γνωρίζουμε τη σταθερά K. Επομένως, γράφουμε

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+2\zeta\omega_n\frac{dx(t)}{dt}+\omega_n{}^2x(t)=\omega_n{}^2x_{ss}(t) \tag{7-78}$$

$$x(t)=c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t}+x_{ss} \tag{7-79}$$

Προκειμένου να υπολογίσουμε τις σταθερές της ολοκλήρωσης, χρησιμοποιούμε τις αρχικές συνθήκες. Ας υποθέσουμε ότι αυτές είναι

$$\begin{aligned} x(0)&=0\\ \dot{x}(0)&=0 \end{aligned} \tag{7-80}$$

Τότε, η Εξ. (7-79) δίδει

$$\begin{aligned} 0&=c_1+c_2+x_{ss}\\ 0&=\lambda_1c_1+\lambda_2c_2 \end{aligned} \tag{7-81}$$

Λύνοντας αυτό το σύστημα λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} c_1&=\frac{\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}x_{ss}\\ c_2&=-\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}x_{ss} \end{aligned} \tag{7-82}$$

Συνθέτουμε τώρα τη λύση που είναι

$$x(t)=x_{ss}\left(1+\frac{\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}e^{\lambda_1 t}-\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}e^{\lambda_2 t}\right) \tag{7-83}$$

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να βρούμε την απόκριση για την περίπτωση της κρίσιμης απόσβεσης, $\zeta=1$, που είναι

$$x(t)=x_{ss}\left(1-e^{\lambda t}+\lambda te^{\lambda t}\right) \tag{7-84}$$

Τέλος, εάν το κύκλωμα παρουσιάζει υπο-απόσβεση, $1>\zeta>0$, τότε χρησιμοποιώντας την ίδια τεχνική που παρουσιάσαμε στη λύση της ομογενούς, έχουμε

$$\begin{aligned} x(t)&=x_{ss}\left(1-\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cos(\omega_d t-\phi)\right)\\ \phi&=\tan^{-1}\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\\ \omega_d&=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \end{aligned} \tag{7-85}$$

Το Σχ. 7-14 παρουσιάζει την κανονικοποιημένη απόκριση του κυκλώματος όπως περιγράφεται από τις Εξ. (7-83) έως (7-85), με αρχικές συνθήκες αυτές που δίδονται από την Εξ. (7-80).

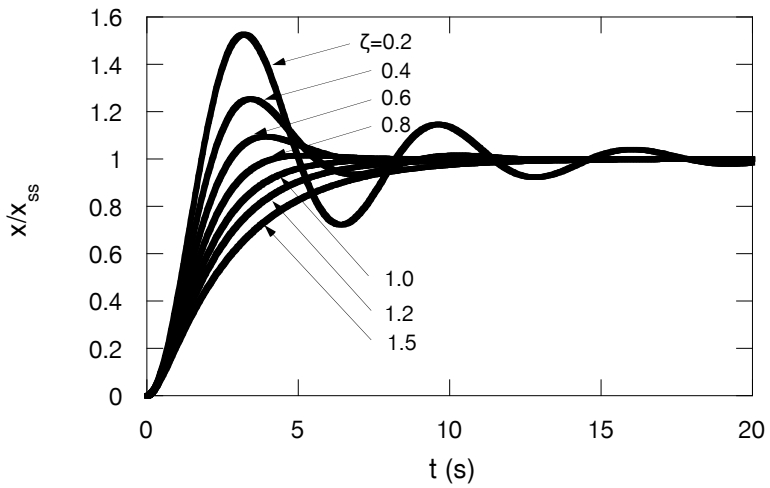
Τέλος, αναλύοντας τις Εξ. (7-83)-(7-85), παρατηρούμε ότι έχουν την μορφή

$$x(t) = x_{ss} - x_o^*(t) \tag{7-86}$$

όπου $x_o^*(t)$ είναι η λύση της ομογενούς εξίσωσης με αρχικές συνθήκες

$$\begin{aligned} x(0) &= x_{ss} \\ \dot{x}(0) &= 0 \end{aligned} \tag{7-87}$$

Αυτό μπορεί εύκολα να προκύψει και με σύγκριση των Σχ. 7-14 και 7-13.



Σχήμα 7-14. Απόκριση δευτεροβάθμιας διαφορικής εξίσωσης σε βηματική είσοδο, με μηδενική αρχική κλίση.

Παράδειγμα 7-8

Να ευρεθεί αναλυτικά η απόκριση ενός κυκλώματος 2ας τάξης σε μία μοναδιαία κρουστική είσοδο,

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dx(t)}{dt} + \omega_n{}^2 x(t) = \delta(t)$$

όταν $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$.

Λύση

Προκειμένου για μοναδιαία βηματική συνάρτηση η Εξ. (7-75) με $K = 1$ δίδει $x_{ss} = \omega_n^{-2}$. Χρησιμοποιούμε την ιδιότητα της διαφόρισης του Εδαφ. 7-3 και τις Εξ. (7-83)-(7-85).

Για την περίπτωση της υπέρ-απόσβεσης, παραγωγίζουμε την Εξ. (7-83) και έχουμε

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{\omega_n^2} \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}\right) \Rightarrow \\ x(t) &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}\right) \quad \zeta > 1 \end{aligned}$$

όπου λάβαμε υπ' όψη μας ότι το γινόμενο των ριζών είναι ίσο με το τετράγωνο της φυσικής συχνότητας.

Επίσης, για την περίπτωση της κρίσιμης απόσβεσης, μετά από παραγώγιση προκύπτει ότι

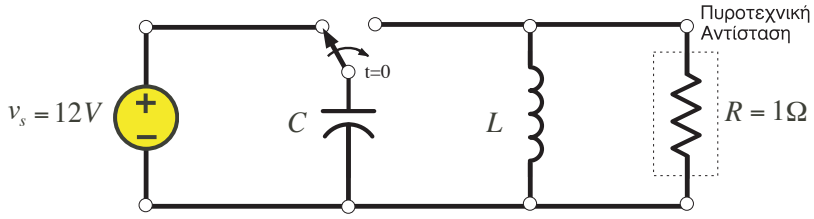
$$x(t) = te^{-\omega_n t} \quad \zeta = 1$$

και τέλος, για την περίπτωση της υπό-απόσβεσης, έχουμε

$$x(t) = \frac{\omega_n e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t) \quad 0 < \zeta < 1 \qquad \blacksquare$$

Παράδειγμα 7-9

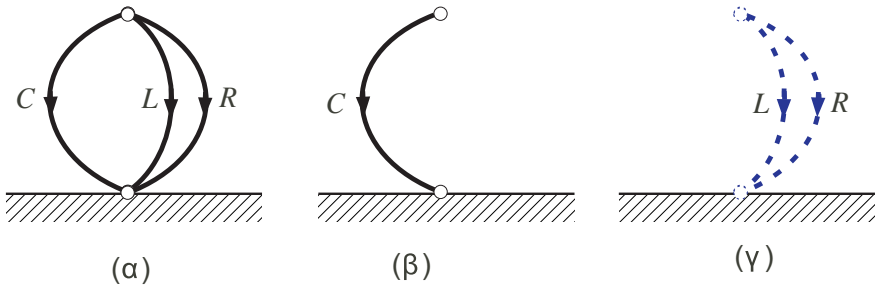
Το κύκλωμα του Σχ. 7-15 είναι ένα μοντέλο του κυκλώματος ενεργοποίησης αερόσακου αυτοκινήτου. Κατά τη σύγκρουση, ο διακόπτης (εκκρεμές) εφαρμόζει την τάση του πυκνωτή στο παράλληλο πηνίο και αντίσταση. Η θερμότητα που εκλύεται από την αντίσταση ενεργοποιεί πυροτεχνική διάταξη που φουσκώνει τον αερόσακο σε 30-35ms. Θέλουμε να επιλέξουμε τη χωρητικότητα του πυκνωτή και την επαγωγή του πηνίου έτσι ώστε ο χρόνος αποκατάστασης να είναι 15ms και ο λόγος απόσβεσης να είναι 0,7. Επί πλέον, προκειμένου να επιτευχθεί η έγκαιρη ενεργοποίηση της διάταξης, η αντίσταση πρέπει να εκλύσει ενέργεια ίση με 0,1J σε διάστημα 15ms. Να βρεθεί αν το κύκλωμα αυτό είναι επαρκές.



Σχήμα 7-15. Κύκλωμα ανάφλεξης αερόσακου αυτοκινήτου.

Λύση

Ο πυκνωτής πριν τη σύγκρουση είναι φορτισμένος με τάση 12V. Μετά τη σύγκρουση, ο πυκνωτής είναι συνδεδεμένος παράλληλα με την αντίσταση και τον επαγωγέα. Το Σχ. 7-16 παρουσιάζει το γραμμικό γράφο, το κανονικό δένδρο και τους δεσμούς που αντιστοιχούν στο κύκλωμα του Σχ. 7-15.



Σχήμα 7-16. (α) Γραμμικός γράφος, (β) κανονικό δένδρο και (γ) δεσμοί που αντιστοιχούν στο κύκλωμα του Σχ. 7-15.

Οι εξισώσεις στοιχείων είναι

$$\frac{dv_c}{dt} = \frac{1}{C} i_C$$
$$\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} v_L$$
$$i_R = v_R / R$$

όπου στο αριστερό μέρος έχουμε τις πρωτεύουσες μεταβλητές. Οι ΝΤΚ και ΝΡΚ γράφονται με τη βοήθεια του κανονικού δένδρου και χρησιμοποιούνται για να βρεθούν εκφράσεις για τις δευτερεύουσες μεταβλητές.

$$v_c = v_L = v_R$$
$$i_L + i_R + i_C = 0 \Rightarrow$$
$$i_C = -(i_L + i_R)$$

Η τελευταία εξίσωση γράφεται ως

$$i_C = -(i_L + v_C / R)$$

και αντικαθίσταται στην εξίσωση στοιχείου του πυκνωτή. Έτσι έχουμε τις εξής εξισώσεις κατάστασης

$$\frac{dv_C}{dt} = -\frac{1}{C}\left(i_L + \frac{v_C}{R}\right)$$
$$\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} v_C$$

Χρησιμοποιώντας τελεστές, έχουμε

$$\left.\begin{aligned} S\{v_C\} + \frac{\{i_L\}}{C} + \frac{\{v_C\}}{CR} = 0 \\ S\{i_L\} - \frac{1}{L}\{v_C\} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \left(S + \frac{1}{CR}\right)\{v_C\} + \frac{1}{C}\{i_L\} = 0 \\ -\frac{1}{L}\{v_C\} + S\{i_L\} = 0 \end{aligned}$$

Έχουμε ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους, την τάση και το ρεύμα. Επιλύουμε στη συνέχεια ως προς τους αγνώστους και έχουμε

$$\left.\begin{aligned} \left(S^2 + \frac{S}{CR}\right)\{v_C\} + \frac{1}{C} S\{i_L\} = 0 \\ \frac{1}{CL}\{v_C\} - \frac{1}{C} S\{i_L\} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \left(S^2 + \frac{S}{CR} + \frac{1}{CL}\right)\{v_C\} = 0 \\ \{i_L\} = \frac{1}{L} S^{-1}\{v_C\} \end{aligned}$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός δίδει μία διαφορική εξίσωση ως προς την τάση του πυκνωτή, που είναι ίση με την τάση της αντίστασης.[3]

$$\frac{d^2 v_C}{dt^2} + \frac{1}{CR}\frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{CL} v_C = 0$$

Το ρεύμα μπορεί να υπολογισθεί με ολοκλήρωση

[3] Η διαφορική αυτή εξίσωση θα μπορούσε να προκύψει και πιο εύκολα, παραγωγίζοντας την εξίσωση στοιχείου του επαγωγέα και αντικαθιστώντας στην εξίσωση του πυκνωτή. Ακολουθήσαμε όμως την πλέον συστηματική μέθοδο, που εφαρμόζεται και σε άλλα προβλήματα.

$$i_L(t) = \frac{1}{L}\int_0^t v_C(\tau)d\tau + i_L(0)$$

Εάν συγκρίνουμε τη διαφορική εξίσωση ως προς την τάση με την κανονική μορφή της,

$$\frac{d^2 v_C}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dv_C}{dt} + \omega_n{}^2 v_C = 0$$

προκύπτει ότι

$$\omega_n{}^2 = \frac{1}{CL} \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{1}{CL}}$$

$$2\zeta\omega_n = \frac{1}{CR} \Rightarrow \zeta = \frac{1}{2R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

ενώ ο χρόνος αποκατάστασης για $\zeta = 0,7$ είναι

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = 8RC \Rightarrow C = \frac{t_s}{8R} = \frac{0.015}{8\cdot 1} = 0,0019F$$

Επομένως

$$\zeta = \sqrt{\frac{2L}{Rt_s}} \Rightarrow L = \frac{\zeta^2 Rt_s}{2} = \frac{0,7^2\cdot 1\cdot 0.015}{2} = 0,00367H$$

Προκειμένου να χαράξουμε την απόκριση της τάσης και της ενέργειας που απορροφήθηκε από την αντίσταση, χρησιμοποιούμε τη λύση της ομογενούς με τις αρχικές συνθήκες. Η δεύτερη αρχική συνθήκη για την τάση προκύπτει από την εξίσωση στοιχείου του πυκνωτή

$$\frac{dv_C}{dt}(0) = -\frac{1}{C}\left(i_L(0) + \frac{v_C}{R}(0)\right) = -\frac{1}{0,0019}\left(0 + \frac{12}{1}\right) = -6.315,8V/s$$

Επομένως, η εξίσωση

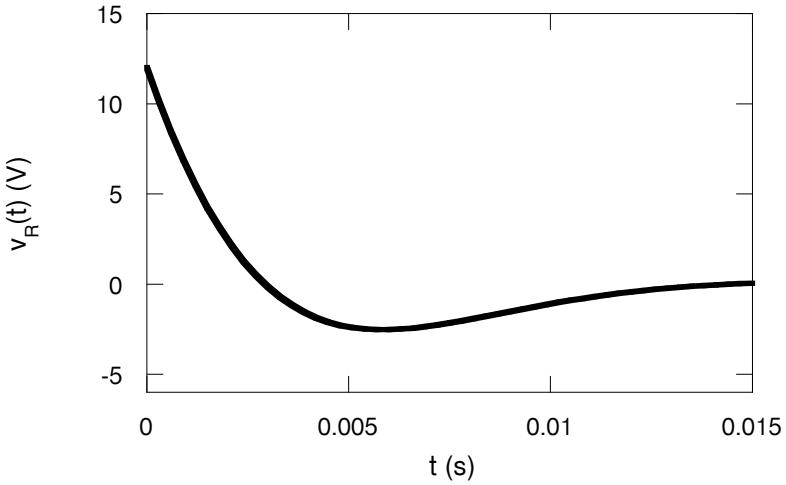
$$v_C(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left(c_1^* \cos(\omega_d t) + c_2^* \sin(\omega_d t)\right)$$

δίδει με $\omega_n = 378,4 rad/s, \omega_d = 270,3 rad/s$

$$12 = c_1^*$$

$$\frac{d}{dt}v_C(0) = \omega_d c_2^* - c_1^*\zeta\omega_n \Rightarrow -6.315,8 = -c_1^* 264,9 + 270,3c_2^*$$

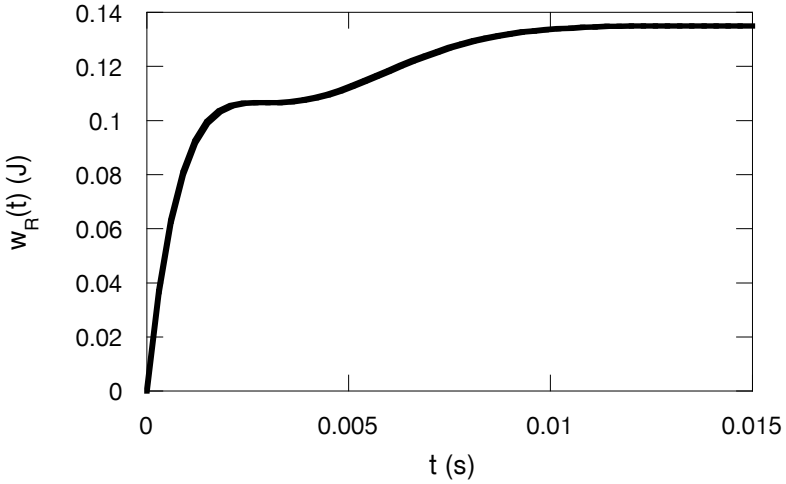
Επιλύοντας αυτό το σύστημα έχουμε $c_1^* = 12,0$ και $c_2^* = -11.61$. Το Σχ. 7-17 παριστά την απόκριση της τάσης της αντίστασης. Παρατηρούμε ότι η απόκριση οδηγείται στο μηδέν όπως αναμέναμε, με κάποια μικρή ταλάντωση. Επίσης, η αρχική κλίση της απόκρισης είναι μη μηδενική.



Σχήμα 7-17. Απόκριση της τάσης της αντίστασης.

Τέλος, το Σχ. 7-18 δίδει την απόκριση της ενέργειας που απορροφήθηκε όπως δίδεται από την εξίσωση

$$w(t) = \int_0^t \frac{v_R^2(\tau)}{R} d\tau$$



Σχήμα 7-18. Απόκριση της ενέργειας που μετατράπηκε σε θερμότητα από την αντίσταση.

Παρατηρούμε ότι η ενέργεια που εκλύθηκε είναι πάνω από 0,1J και επομένως αυτό το κύκλωμα είναι επαρκές. ■

7-6 Απόκριση Μεταβλητών Κατάστασης

Στο εδάφιο αυτό, παρουσιάζουμε την απόκριση ενός κυκλώματος όταν αυτό περιγράφεται από τις εξισώσεις κατάστασης με μορφή

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{aligned} \tag{7-88}$$

Απόκριση σε Αρχικές Συνθήκες

Στην περίπτωση αυτή, έχουμε

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{7-89}$$

και ή λύση (χωρίς απόδειξη) είναι παρόμοια σε μορφή με τη λύση που αντιστοιχεί σε ένα κύκλωμα πρώτης τάξης, δηλαδή είναι

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_o(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) \tag{7-90}$$

όπου $e^{\mathbf{A}t}$ είναι ένας πίνακας διάστασης $n \times n$, που ορίζεται από τη σχέση

$$e^{\mathbf{A}t} = \left(\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3 t^3}{3!} + \cdots + \frac{\mathbf{A}^k t^k}{k!} + \cdots \right) \tag{7-91}$$

Η λύση που δίνεται από την Εξ. (7-80) μπορεί να επαληθευθεί εύκολα με αντικατάσταση στην Εξ. (7-89) και χρήση της Εξ. (7-91).

Απόκριση σε Εισόδους

Στην περίπτωση αυτή, το κύκλωμα περιγράφεται από τις Εξ. (7-88) και η πλήρης απόκριση έχει τη μορφή

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \tag{7-92}$$

Παρατηρούμε ότι ο πρώτος όρος της Εξ. (7-92) αντιστοιχεί στην απόκριση σε αρχικές συνθήκες, είναι δηλαδή η λύση της ομογενούς που εξετάστηκε ήδη. Οι διαστάσεις του είναι αυτές του $\mathbf{x}(t)$, δηλαδή $n \times 1$. Ο δεύτερος όρος οφείλεται στις εισόδους, το δε ολοκλήρωμα αυτό, είναι διάστασης $n \times 1$ και λέγεται **συνέλιξη**. Προκειμένου να υπολογισθεί αναλυτικά, πρέπει να γίνουν n^2 βαθμωτές ολοκληρώσεις, μία για κάθε ένα από τα στοιχεία του πίνακα που ολοκληρώνεται.

Τέλος, η απόκριση των εξόδων γράφεται ως

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \tag{7-93}$$

Παράδειγμα 7-10

Να υπολογισθεί η απόκριση σε αρχικές συνθήκες του κυκλώματος του Παραδείγματος 7-9 όταν $C = 1/3F$, $L = 1/2H$, $R = 1\Omega$.

Λύση

Οι εξισώσεις κατάστασης είναι

$$\frac{dv_C}{dt} = -3i_L - 3v_C$$
$$\frac{di_L}{dt} = 2v_C$$

Επομένως, σε μορφή πινάκων είναι

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix}$$

με

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Σε αυτή την περίπτωση, η Εξ (7-91) γράφεται ως

$$e^{\mathbf{A}t} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \frac{t^2}{2} + \cdots \right)$$

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{3t}{1!} + \frac{3t^2}{2!} - \frac{9t^3}{3!} - \cdots & 0 - \frac{3t}{1!} + \frac{9t^2}{2!} - \frac{9t^3}{3!} - \cdots \\ 0 + \frac{2t}{1!} - \frac{6t^2}{2!} + \frac{6t^3}{3!} - \cdots & 1 - \frac{0t}{1!} - \frac{6t^2}{2!} + \frac{18t^3}{3!} - \cdots \end{bmatrix}$$

και η λύση είναι

$$v_C(t) = \left(1 - \frac{3t}{1!} + \frac{3t^2}{2!} - \frac{9t^3}{3!} \cdots \right) v(0)$$

$$i_L(t) = \left(0 + \frac{2t}{1!} - \frac{6t^2}{2!} + \frac{6t^3}{3!} \cdots \right) v(0)$$

Οι όροι στην απειροσειρά αυτή συγκλίνουν όταν το κύκλωμα είναι ευσταθές ενώ ο αριθμός των όρων στη σειρά εξαρτάται από την ακρίβεια που μας ενδιαφέρει.

Πολλές φορές, αυτές οι απειροσειρές μπορούν να αναγνωρισθούν ως ένα αλγεβρικό άθροισμα εκθετικών συναρτήσεων που αντιστοιχούν στις ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης. Το θέμα αυτό έχει θεωρητικό μόνο ενδιαφέρον διότι οι εξισώσεις αυτές ολοκληρώνονται σχεδόν πάντοτε αριθμητικά, δηλαδή με χρήση υπολογιστή. Αυτό συμβαίνει ιδίως όταν έχουμε προβλήματα μεγάλου μεγέθους (μεγάλης τάξης). ■

7-7 Αριθμητικός Προσδιορισμός Απόκρισης

Στα προηγούμενα εδάφια ασχοληθήκαμε με τον **αναλυτικό** προσδιορισμό της απόκρισης των κυκλωμάτων. Η εύρεση της αναλυτικής μορφής της απόκρισης μας επιτρέπει την καλύτερη κατανόηση της δυναμικής ενός κυκλώματος, της επιλογής παραμέτρων έτσι ώστε να ικανοποιούνται ορισμένες προδιαγραφές και τον έλεγχο λύσεων που έχουν παραχθεί με αριθμητικές μεθόδους.

Όμως, το μέγεθος πολλών πρακτικών προβλημάτων οδηγεί στην ανάγκη να επιλυθούν αυτά με χρήση υπολογιστή. Ένας υπολογιστής με κατάλληλο λογισμικό μπορεί να παρουσιάσει τη λύση σε δύο μορφές (α) **συμβολική** και (β) **αριθμητική**.

Η συμβολική επίλυση καταλήγει σε μία ή περισσότερες αναλυτικές συναρτήσεις του χρόνου, όπως αυτές που βρίσκει κανείς με αναλυτικό τρόπο με χαρτί και μολύβι. Λογισμικό όπως το *Mathematica* και το *Maple* μπορούν να εκτελέσουν συμβολικά τις

πράξεις και τα ολοκληρώματα της Εξ. (7-92). Για παράδειγμα, η είσοδος των εξής δύο απλών διαφορικών εξισώσεων που περιγράφουν μία ταλάντωση χωρίς απόσβεση

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -x_1$$

στο πρόγραμμα *Mathematica* γίνεται ως εξής

```
In[7]:=
  DSolve[ {x1'[t]==x2[t], x2'[t]==-x1[t]},{x1[t], x2[t]},t]
```

και το αποτέλεσμα λαμβάνεται στη μορφή

Out[7]=

$$\{\{x1[t] \to (\frac{E^{-I\,t}}{2} + \frac{E^{I\,t}}{2})\,C[1] + (\frac{I}{2}\,E^{-I\,t} - \frac{I}{2}\,E^{I\,t})\,C[2],$$
$$x2[t] \to (\frac{-I}{2}\,E^{-I\,t} + \frac{I}{2}\,E^{I\,t})\,C[1] + (\frac{E^{-I\,t}}{2} + \frac{E^{I\,t}}{2})\,C[2]\}\}$$

Παρατηρείστε ότι το αποτέλεσμα περιλαμβάνει δύο σταθερές που υπολογίζονται από τις αρχικές συνθήκες και είναι σε μορφή αθροισμάτων μιγαδικών εκθετικών. Ο χρήστης πρέπει στη συνέχεια να καθοδηγήσει το πρόγραμμα να χρησιμοποιήσει τις εξισώσεις Euler έτσι ώστε τελικά να πάρει την αναμενόμενη συνημιτονική μορφή. Τα προγράμματα αυτά δηλαδή απαιτούν συμμετοχή του χρήστη και μπορούν να χρησιμοποιηθούν κυρίως για προβλήματα μεσαίου μεγέθους.

Η αριθμητική επίλυση είναι η πλέον ευρέως χρησιμοποιούμενη γιατί είναι ευκολόχρηστη και εφαρμόζεται και σε πολύ μεγάλα προβλήματα. Για να υπολογισθεί η απόκριση ενός κυκλώματος αριθμητικά, πρέπει οι εξισώσεις που το διέπουν να είναι σχεδόν πάντοτε στη μορφή των Εξ. (7-88).

Εάν το κύκλωμα περιγράφεται από εξίσωση είναι της μορφής της Εξ. (7-16), αυτή πρέπει πρώτα να μετατραπεί σε εξισώσεις κατάστασης με χρήση της μεθοδολογίας του Εδαφίου 6-9, δηλαδή με τις Εξ. (6-58). Οι αλγόριθμοι που έχουν γραφεί για αυτή την ολοκλήρωση περιέχονται σε λογισμικό όπως το Matlab, Matrixx, Control-c, Spice και άλλα και τρέχουν σε κάθε είδος υπολογιστή, από προσωπικούς μέχρι σταθμούς εργασίας και κύριους υπολογιστές.

Οι αριθμητικές μέθοδοι υπολογίζουν τις **αριθμητικές τιμές** των μεταβλητών κατάστασης ή εξόδου σε διακριτές χρονικές στιγμές και παράγουν τη λύση σε μορφή πίνακα ή γραφικής παράστασης. Οι μέθοδοι αυτές μπορούν να δίνουν τα αποτελέσματα με κάποια καθυστέρηση μέχρι να εκτελέσουν τους υπολογισμούς, ή με ελάχιστη καθυστέρηση έτσι ώστε τα αποτελέσματα να παράγονται όσο γρήγορα αποκρίνεται το πραγματικό κύκλωμα που μελετάμε.

Η κεντρική ιδέα όλων των αλγορίθμων είναι ότι αν γνωρίζουμε τις αρχικές συνθήκες και όλες τις παραγώγους κάποια χρονική στιγμή, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε την απόκριση σε μία χρονική στιγμή πολύ κοντά στην αρχική και μετά να συνεχίσουμε τον υπολογισμό με την ίδια μέθοδο. Οι μέθοδοι αυτές είναι βέβαια **προσεγγιστικές** και περικλείουν **σφάλματα** που οφείλονται στην περιορισμένη (αν και μεγάλη) ακρίβεια των αριθμών όπως αποθηκεύονται σε ένα υπολογιστή.

Εξετάζουμε στη συνέχεια μία απλή μέθοδο αριθμητικής επίλυσης κυκλωμάτων.

Αριθμητική Επίλυση με Ολοκλήρωση κατά Euler

Υποθέτουμε ότι ένα κύκλωμα περιγράφεται από τη σχέση

$$\dot{x} = f(x,u,t) \tag{7-94}$$

Εάν η απόκριση $x(t)$ και οι παράγωγοί της είναι συνεχείς σε χρόνο $t = t_0$, τότε η απόκριση σε χρόνο $t = t_0 + \Delta t$ μπορεί να βρεθεί με το εξής ανάπτυγμα Taylor

$$x(t_0 + \Delta t) = x(t_0) + \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t_0} \Delta t + \left.\frac{d^2x}{dt^2}\right|_{t_0} \Delta t^2 + \cdots + \left.\frac{d^nx}{dt^n}\right|_{t_0} \Delta t^n + O(\Delta t^{n+1}) \tag{7-95}$$

όπου $O(\Delta t^{n+1})$ είναι όροι τάξης $n+1$ ως προς το Δt. Εάν το Δt είναι μικρό, τότε οι όροι αυτοί είναι πολύ μικροί και επομένως μπορούμε να τους παραλείψουμε.

Παραλείποντας όλους τους όρους εκτός από αυτόν με τάξη 1, παίρνουμε την εξής **προσεγγιστική** σχέση

$$\begin{aligned} x(t_0 + \Delta t) &\approx x(t_0) + \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t_0} \Delta t \Rightarrow \\ x(t_0 + \Delta t) &\approx x(t_0) + f(x,u,t)\big|_{t_0} \Delta t \end{aligned} \tag{7-96}$$

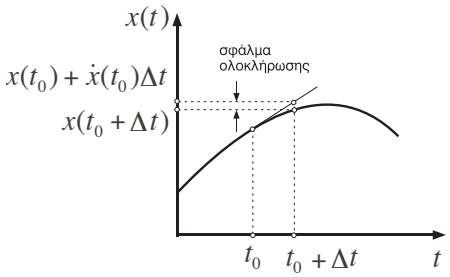
όπου στη δεύτερη των Εξ. (7-96) χρησιμοποιήσαμε την Εξ. (7-94).

Το Σχ. 7-19 παριστά γραφικά την Εξ. (7-96). Η τιμή που προσεγγίζει την πραγματική τιμή $x(t_0 + \Delta t)$ βρίσκεται επάνω στην εφαπτόμενη της καμπύλης $x(t)$ και σε χρονική απόσταση Δt από το σημείο $x(t_0)$.

Με τον τρόπο αυτό εισάγεται ένα σφάλμα που δίδεται από την επόμενη σχέση

$$e = x(t_0 + \Delta t) - \left(x(t_0) + f(x,u,t)\big|_{t_0} \Delta t \right) \tag{7-97}$$

και γενικά εξαρτάται από την τιμή του Δt.



Σχήμα 7-19. Σφάλμα αριθμητικής ολοκλήρωσης με τη μέθοδο Euler.

Η Εξ. (7-96) μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως η βάση για την ανάπτυξη του εξής αλγορίθμου ολοκλήρωσης, που λέγεται αλγόριθμος του **Euler**

$$\begin{aligned} x_n &= x_{n-1} + f(x_{n-1}, u_{n-1}, t_{n-1})\Delta t \quad n = 1, \cdots, N \\ x_0 &= x(0) \end{aligned} \tag{7-98}$$

Στην περίπτωση που ένα κύκλωμα περιγράφεται από τις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις (7-88), τότε ο αλγόριθμος του Euler γράφεται ως

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_n &= (\mathbf{I} + \mathbf{A}\Delta t)\mathbf{x}_{n-1} + \mathbf{B}\mathbf{u}_{n-1}\Delta t \quad n = 1, \cdots, N \\ \mathbf{x}_0 &= \mathbf{x}(0) \end{aligned} \tag{7-99}$$

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι το άθροισμα Δt αντιστοιχεί στους πρώτους δύο όρους της σειράς του εκθετικού που δίδεται από την Εξ. (7-91) και είναι μέρος της ομογενούς απόκρισης που περιγράφεται από την Εξ. (7-90).

Η ολοκλήρωση κατά Euler δεν είναι η πλέον ακριβής, όμως κατανοείται και χρησιμοποιείται εύκολα. Στην πράξη συνήθως χρησιμοποιούνται οι μέθοδοι **Runge-Kutta** που βασίζονται σε ένα ανάπτυγμα Taylor με όρους μέχρι τέταρτης τάξης, δηλαδή μέχρι και το Δt^4. Έχει παρατηρηθεί ότι η χρήση όρων μεγαλύτερης τάξης δεν προσφέρει σημαντικά πλεονεκτήματα.

Επιλογή Παραμέτρων Ολοκλήρωσης

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε επιλέξει μία μέθοδο ολοκλήρωσης και είτε έχουμε γράψει κάποιο πρόγραμμα που υλοποιεί τον αλγόριθμο της, π.χ. την Εξ. (7-99) προκειμένου για ολοκλήρωση κατά Euler, είτε έχουμε στη διάθεσή μας ένα εμπορικό πρόγραμμα που περιλαμβάνει τον αλγόριθμο αυτό.

Προκειμένου να υπολογίσουμε την απόκριση, χρειαζόμαστε δύο ακόμη παραμέτρους: (α) το **βήμα ολοκλήρωσης** Δt και (β) τον αριθμό των διακριτών σημείων N που πρέπει να είναι τόσα ώστε να καλύψουν το χρονικό διάστημα που μας ενδιαφέρει.

Αν και υπάρχουν μέθοδοι στις οποίες το βήμα ολοκλήρωσης είναι μεταβλητό (μέσα σε όρια που καθορίζονται από το χρήστη), υποθέτουμε εδώ ότι το βήμα είναι σταθερό. Εξ' άλλου, αυτό το βήμα είναι μία καλή ένδειξη για το που πρέπει να κυμαίνεται και ένα μεταβλητό βήμα.

Για να υπολογίσουμε το απαιτούμενο βήμα, σκεπτόμαστε ως εξής. Η απόκριση ενός κυκλώματος είναι ένα άθροισμα εκθετικών όρων που φθίνουν με διαφορετικούς ρυθμούς. Το βήμα θα πρέπει να είναι αρκετά μικρό ώστε να μπορεί να ακολουθήσει ακόμη και τη πλέον γρήγορη στοιχειώδη απόκριση. Επειδή δε η ταχύτητα απόκρισης εξαρτάται κυρίως από το μέγεθος των ριζών της χαρακτηριστικής εξίσωσης[4], Εξ. (7-21), μπορούμε να γράψουμε

$$\Delta t = \frac{1}{10}\min_i\left(\frac{1}{|\lambda_1|}, \cdots, \frac{1}{|\lambda_i|}, \cdots, \frac{1}{|\lambda_n|}\right) \tag{7-100}$$

Η Εξ. (7-100) δείχνει ότι προκειμένου για πραγματικές ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης, το βήμα είναι 10 φορές μικρότερο από τη χρονική σταθερά του ταχύτερου εκθετικού. Ο παράγων 10 είναι αυθαίρετος. Παλαιότερα, χρησιμοποιούταν το 5 για λόγους επιτάχυνσης των υπολογισμών, σήμερα όμως ακόμη και ένας προσωπικός υπολογιστής είναι αρκούντως γρήγορος για τους υπολογισμούς αυτούς.

[4] Οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι ίσες προς τις ιδιοτιμές του πίνακα **A** στις Εξ. (7-88). Επομένως, οι ρίζες αυτές είναι εύκολο να υπολογισθούν είτε το κύκλωμα περιγράφεται από μία διαφορική εξίσωση n τάξης, είτε περιγράφεται από την Εξ. (7-88).

Προκειμένου να καλύψουμε όλο το χρονικό διάστημα κατά το οποίο η απόκριση μεταβάλλεται, θα πρέπει όλα τα στοιχειώδη εκθετικά που την αποτελούν να έχουν μηδενισθεί (εξαιρούμε την περίπτωση των καθαρών ταλαντώσεων). Επομένως, θα πρέπει να έχει φθάσει στην ηρεμία και το πλέον αργό εκθετικό, άρα μπορούμε να πούμε ότι το χρονικό διάστημα που μας ενδιαφέρει είναι τουλάχιστον ίσο με 4 αργές χρονικές σταθερές

$$T_f = 4\max_i\left(\frac{1}{\mathrm{Re}(\lambda_1)},\cdots,\frac{1}{\mathrm{Re}(\lambda_i)},\cdots,\frac{1}{\mathrm{Re}(\lambda_n)}\right) \tag{7-101}$$

Τότε, ο αριθμός των σημείων N που θα πρέπει να υπολογισθούν είναι

$$N = \frac{T_f}{\Delta t} = 40\frac{\max_i\left(\frac{1}{\mathrm{Re}(\lambda_1)},\cdots,\frac{1}{\mathrm{Re}(\lambda_i)},\cdots,\frac{1}{\mathrm{Re}(\lambda_n)}\right)}{\min_i\left(\frac{1}{|\lambda_1|},\cdots,\frac{1}{|\lambda_i|},\cdots,\frac{1}{|\lambda_n|}\right)} = 40\frac{\tau_{\max}}{\tau_{\min}} \tag{7-102}$$

όπου η τελευταία ισότητα ισχύει για πραγματικές ρίζες, με $\tau_{\max}, \tau_{\min}$ την πλέον αργή και πλέον γρήγορη χρονική σταθερά, αντίστοιχα. Παρατηρείστε ότι το N μπορεί να είναι ένας ιδιαίτερα μεγάλος αριθμός, εάν αυτές οι δύο σταθερές έχουν διαφορά μερικές τάξεις μεγέθους. Σε αυτή την περίπτωση το κύκλωμα λέγεται **δύσκαμπτο (stiff)** και απαιτεί ειδικούς αλγόριθμους ολοκλήρωσης (π.χ. τη μέθοδο **Gear**).

Η απλή αυτή ανάλυση δίδει ένα σημείο εκκίνησης για την επιλογή των βασικών παραμέτρων ολοκλήρωσης. Προκειμένου να είμαστε σίγουροι ότι η απόκριση που υπολογίζουμε είναι επαρκής, συχνά υποδιπλασιάζουμε το βήμα και επαναλαμβάνουμε την ολοκλήρωση. Εάν οι δύο αποκρίσεις είναι αρκούντως κοντά, τότε το βήμα που επιλέξαμε αρχικά είναι κατάλληλο, αλλιώς συνεχίζουμε με το υποδιπλάσιό του.

Τέλος, σημειώνουμε ότι η χρήση ενός εξαιρετικά μικρού βήματος δεν είναι επιθυμητή διότι εκτός του ότι ο υπολογισμός είναι χρονοβόρος, επί πλέον τα αριθμητικά σφάλματα που οφείλονται στην περιορισμένη ακρίβεια του υπολογιστή αυξάνουν κατά πολύ. Από την άλλη, ένα πολύ μεγάλο βήμα δεν μπορεί να παρακολουθήσει τα δυναμικά φαινόμενα και μπορεί να οδηγήσει ακόμη και σε αριθμητική αστάθεια (δηλαδή απειρισμό της αριθμητικής απόκρισης).

Παράδειγμα 7-11

Η απόκριση τάσης κατά τη φόρτιση του πυκνωτή φλας του Παρ. 7-6 περιγράφεται από την επόμενη διαφορική εξίσωση με $\tau' = 1s, \quad v_s = 5V$

$$\tau'\frac{d}{dt}v_c(t) + v_c(t) = v_s; \quad v_c(0) = 0$$

Να υπολογισθούν οι παράμετροι ολοκλήρωσης και η απόκριση που προκύπτει όταν το βήμα είναι 5 φορές μεγαλύτερο και 5 φορές μικρότερο από αυτό που προκύπτει από εφαρμογή της Εξ. (7-100) και της μεθόδου Euler.

Λύση

Για το πρόβλημα αυτό έχουμε

$$\mathbf{I} = 1$$

$$\mathbf{A} = -1/\tau' = -1$$

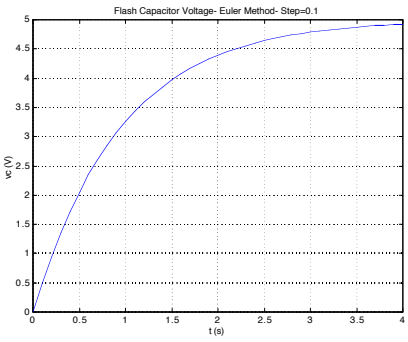
$$\mathbf{B} = \frac{1}{\tau'} = 1$$

$$\mathbf{u}_{n-1} = 5V$$

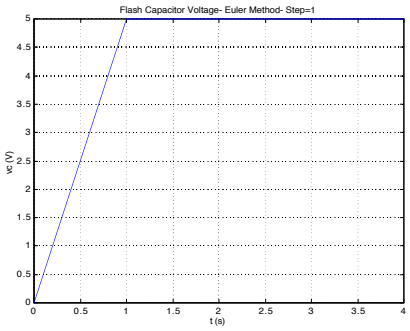
Η χρονική σταθερά είναι 1s επομένως λαμβάνουμε $\Delta t = 0.1s$ και υπολογίζουμε την απόκριση για $\Delta t = 1s$ και $\Delta t = 0.01s$. Τα σημεία που θα χρειαστούμε είναι 40, 4, και 400 αντίστοιχα. Για την ολοκλήρωση χρησιμοποιούμε το *Matlab* και ο κώδικας είναι

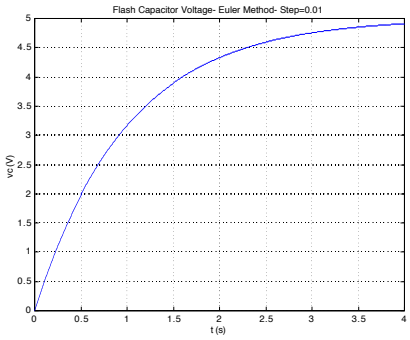
```
% Αυτό το M-File χρησιμοποιεί τη μέθοδο του Euler για να
% υπολογίσει την απόκριση κυκλώματος 1ης τάξης
clear
T=1;                                % Χρονική Σταθερά
DT=0.1;                             % Βήμα
x(1)=0;                             % Αρχική Συνθήκη
N=40;                               % Αριθμός Σημείων
n=1;
while n<N+1
       x(n+1)=(1-DT)*x(n)+DT*5;     % Euler's Formula
       n=n+1;
end
t=0:0.1:4;                          % Διάνυσμα χρόνου
plot(t,x)                           % Απόκριση
title('Flash Capacitor Voltage - Euler Method - Step=0.1')
xlabel('t (s)')
ylabel('vc (V)')
grid
```

Το Σχ. 7-20 παρουσιάζει το αποτέλεσμα για τα τρία επιλεγμένα βήματα. Παρατηρούμε ότι η απόκριση που αντιστοιχεί σε βήμα $\Delta t = 0.01s$ και $\Delta t = 0.1s$ είναι περίπου η ίδια, επομένως το βήμα $\Delta t = 0.1s$ είναι σε πρώτη προσέγγιση επαρκές. Το βήμα $\Delta t = 1s$ όμως προφανώς δεν είναι επαρκές διότι δεν περιγράφει την απόκριση σωστά.



(α)





(β) (γ)

Σχήμα 7-20. (α) Απόκριση τάσης με βήμα 0,1s, (β) Απόκριση τάσης με βήμα 1s, (γ) Απόκριση τάσης με βήμα 0,01s.

Ο Πίνακας 7-3 παραθέτει τις τελικές τιμές της απόκρισης σε χρόνο $T_s = 4s$ καθώς και το σφάλμα της απόκρισης σε σχέση με την αναλυτική λύση.

Πίνακας 7-3. Σφάλμα ολοκλήρωσης ως συνάρτηση του βήματος ολοκλήρωσης.

Βήμα	Τιμή Τάσης (V)	Σφάλμα (%)
0,01	4,9102	0,036
0,1	4,9261	0,360
1	5,0000	1,866
Ακριβής Τιμή	4,9084	0,000

Όπως δείχνει ο πίνακας αυτός, όλες οι αριθμητικές λύσεις παρουσιάζουν κάποιο σφάλμα, αυτό όμως είναι (ή μπορεί να γίνει) πολύ μικρό. ■