



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών, Τομέας ΜΚ&ΑΕ

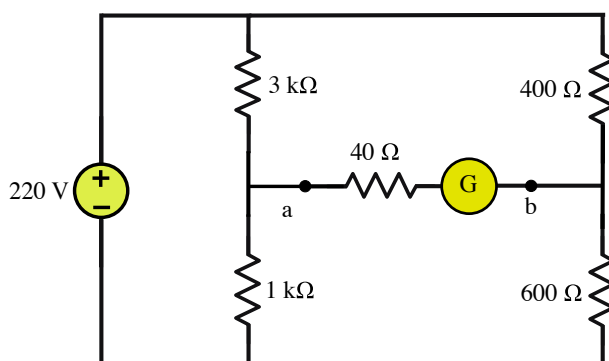
# **Ηλεκτρικά Κυκλώματα και Συστήματα**

## **Ασκήσεις για Επίλυση**

## Δίκτυα

## Άσκηση 1-1

Το κύκλωμα του Σχ. 1-1 παριστάνει μια μη ισορροπημένη γέφυρα. Αν το γαλβανόμετρο έχει αντίσταση  $40 \Omega$ , να βρεθεί το ρεύμα το διαρρέει.



Σχήμα 1-1. Μη ισορροπημένη γέφυρα.

## Άσκηση 1-2

Όπως είναι γνωστό, η χωρητικότητα ενός πυκνωτή παράλληλων επιφανειών δίνεται από την έκφραση

$$C = \frac{\epsilon A}{d}$$

όπου  $\epsilon$  είναι η διαπερατότητα του διηλεκτρικού υλικού,  $A$  η έκταση κάθε επιφάνειας και  $d$  η απόσταση μεταξύ τους. Η διαπερατότητα του αέρα είναι  $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ F/m}$ , με αποτέλεσμα δύο παράλληλες επιφάνειες  $1 \text{ m}^2$ , που απέχουν  $1 \text{ mm}$ , να δημιουργούν χωρητικότητα  $8.854 \times 10^{-3} \mu\text{F}$ , μια πολύ μικρή τιμή για μια πολύ μεγάλη επιφάνεια. Μια τέτοια λοιπόν κατασκευή δεν είναι πρακτική για τις ηλεκτρονικές κατασκευές. Παρόλα αυτά, οι πυκνωτές παράλληλων επιφανειών βρίσκουν εφαρμογή ως αισθητήρες (sensors) κίνησης, δηλαδή, ως συσκευές που μπορούν να μετρήσουν κίνηση ή μετατόπιση ενός αντικείμενου. Σε μια τέτοια διάταξη, το διάκενο αέρα μεταξύ των επιφανειών σχεδιάζεται έτσι ώστε να είναι μεταβλητό. Αυτό επιτυγχάνεται με το να σταθεροποιείται η μια επιφάνεια και η άλλη να στερεώνεται στο αντικείμενο που κινείται. Συνεπώς, για μεταβλητή απόσταση έχουμε,

$$C = \frac{8.854 \times 10^{-3} A}{x}$$

όπου  $C$  είναι η χωρητικότητα σε  $pF$ ,  $A$  η έκταση της επιφάνειας σε  $\text{mm}^2$  και  $x$  η μεταβλητή απόσταση σε  $\text{mm}$ . Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι η μεταβολή της χωρητικότητας που προκαλείται από τη μετατόπιση της μιας επιφάνειας είναι μη

γραμμική ως προς αυτήν τη μετατόπιση. Όμως για μικρή μετατόπιση η χωρητικότητα μεταβάλλεται προσεγγιστικά κατά γραμμικό τρόπο.

Η ευαισθησία  $S$  αυτού του αισθητήρα κίνησης ορίζεται ως η κλίση της μεταβολής της χωρητικότητας προς τη μεταβολή της μετατόπισης  $x$  σύμφωνα με τη σχέση

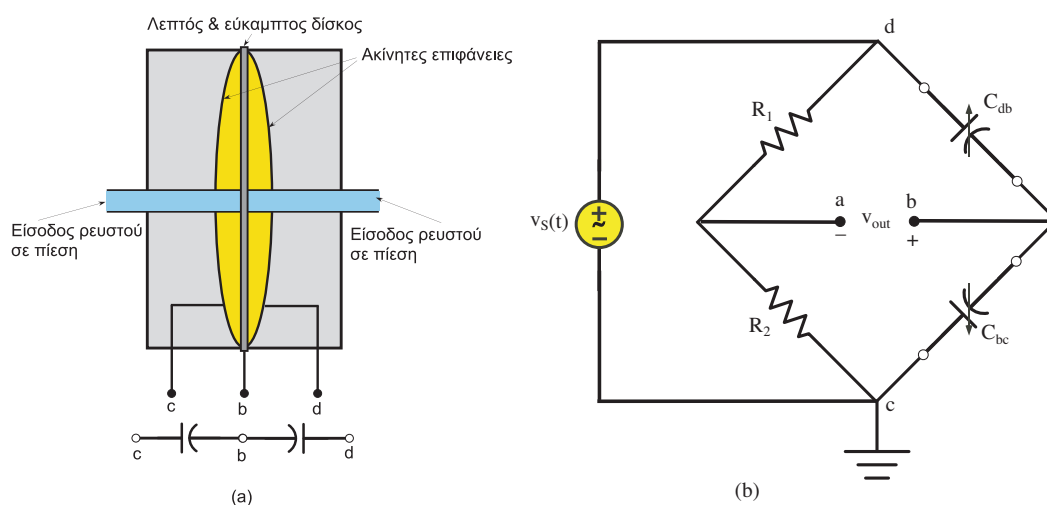
$$S = \frac{dC}{dx} = -\frac{8.854 \times 10^{-3} \text{ A}}{2x^2} \frac{\text{pF}}{\text{mm}}$$

Συνεπώς, η ευαισθησία αυξάνεται για μικρές μετατοπίσεις.

Αυτός ο απλός χωρητικός αισθητήρας μετατόπισης βρίσκει επίσης εφαρμογή στο *χωρητικό μικρόφωνο*, στο οποίο η πίεση των ηχητικών κυμάτων μετατοπίζει τη μια από τις επιφάνειες του πυκνωτή. Η συνεπαγόμενη μεταβολή στη χωρητικότητα μπορεί στη συνέχεια να μετατραπεί σε μεταβολή τάσης ή ρεύματος με κατάλληλο ηλεκτρικό κύκλωμα.

Μια προέκταση της εφαρμογής που επιτρέπει τη μέτρηση της *διαφορικής* πίεσης παριστάνεται στο Σχ. 1-2(α). Όπως φαίνεται στο σχήμα, ένας μεταβλητός πυκνωτής τριών ακροδεκτών είναι κατασκευασμένος από δύο σταθερές επιφάνειες (συνήθως είναι τμήματα σφαιρικών επιφανειών, καλυμμένα από αγωγίμο υλικό) και από έναν εύκαμπτο λεπτό δίσκο (συνήθως από χάλυβα), περιεχόμενο μεταξύ των σταθερών σφαιρικών επιφανειών. Οι δύο είσοδοι ρευστού επιτρέπουν σε ρευστό σε δύο διαφορετικές πιέσεις να έρθει σε επαφή με την εύκαμπτη επιφάνεια. Όταν η πίεση και στις δύο πλευρές του εύκαμπτου δίσκου είναι η ίδια, η χωρητικότητα μεταξύ των ακροδεκτών  $b$  και  $d$ ,  $C_{bd}$ , θα είναι ίση με αυτήν μεταξύ των ακροδεκτών  $b$  και  $c$ ,  $C_{bc}$ . Αν δημιουργηθεί διαφορά πίεσης, οι δύο χωρητικότητες θα αλλάξουν και θ' αυξηθεί στην πλευρά όπου ο εύκαμπτος δίσκος πλησιάζει περισσότερο στην ακίνητη επιφάνεια ενώ θα μειωθεί στην άλλη πλευρά. Αυτή η συμπεριφορά μπορεί να συνδυαστεί με τη χρήση ενός κυκλώματος γέφυρας, όμοια με της Wheatstone του Σχ. 1-2(β). Σε αυτό το κύκλωμα, η τάση εξόδου  $v_{out}$ , εξισορροπείται ακριβώς όταν η διαφορική πίεση στον αισθητήρα είναι μηδέν αλλά αποκλίνει από το μηδέν όταν οι δύο χωρητικότητες δεν είναι ίδιες λόγω διαφοράς πίεσης στον αισθητήρα.

Θεωρώντας ότι το κύκλωμα της γέφυρας τροφοδοτείται από εναλλασσόμενη τάση, να επιλεγούν οι αντιστάσεις έτσι ώστε η σύνθετη αντίσταση του αισθητήρα να μεταβάλλεται γραμμικά ως προς τη μετατόπιση.



**Σχήμα 1-2.** (α) Χωρητικός αισθητήρας και (β) αντίστοιχο κύκλωμα γέφυρας.

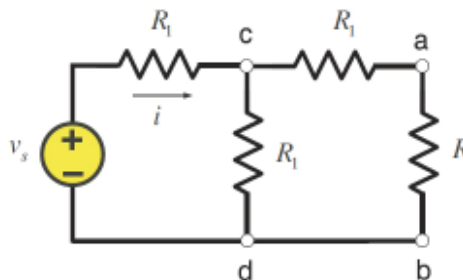
# Thevenin

## Άσκηση 2-1

(α) Στο Σχήμα 2-1 απεικονίζεται το ηλεκτρολογικό σχέδιο ενός θερμαντικού σώματος. Να υπολογιστεί το αντίστοιχο απλοποιημένο κύκλωμα κατά Thevenin αριστερά των ακροδεκτών a-b. Ποια είναι η τάση μεταξύ των ακροδεκτών a και b;

(β) Αν βάλουμε παράλληλα στην αντίσταση R ένα βολτόμετρο (το οποίο μπορεί να μοντελοποιηθεί με μία αντίσταση 4 MΩ) και μετρήσουμε την διαφορά δυναμικού στα άκρα της, τι παρατηρούμε για την τάση  $V_{ab}$  σε σχέση με το πρώτο ερώτημα; Προτείνετε μία λύση για να επιτευχθεί ακρίβεια 0.1 volt στη μέτρηση της αντίστασης R.

Δίδονται  $V_s = 12\text{ V}$ ,  $R_1 = 1\text{ M}\Omega$ ,  $R = 1\text{ M}\Omega$ .



Σχήμα 2-1. Κύκλωμα θερμαντικού σώματος.

## Άσκηση 2-2

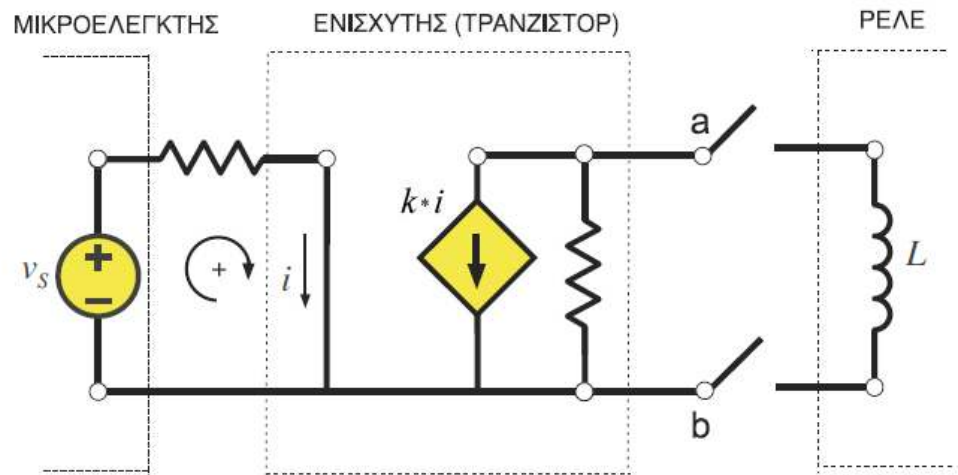
Ένα ρελέ μπορεί να ελεγχθεί με τη βοήθεια ενός μικροελεγκτή. Επειδή ο μικροελεγκτής δεν μπορεί να δώσει μεγάλο ρεύμα, δεν μπορούμε να τον συνδέσουμε απευθείας με το ρελέ αλλά ενδιάμεσα βάζουμε έναν ενισχυτή (τρανζίστορ). Για προστασία, προσθέτουμε και την αντίσταση  $R_1$ . Τα μοντέλα του τρανζίστορ, του μικροελεγκτή και του ρελέ δίνονται στο παρακάτω σχήμα.

(α) Εφαρμόστε το θεώρημα Thevenin και βρείτε την ισοδύναμη πηγή και αντίσταση του κυκλώματος αριστερά από τα σημεία a και b (δηλ. του μικροελεγκτή και του ενισχυτή).

(β) Αν για να λειτουργήσει το ρελέ θέλει τάση τροφοδοσίας 75 V, πόσο θα πρέπει να είναι το κέρδος  $k$  του τρανζίστορ που θα επιλέξουμε;

(γ) Επιλέξτε ρελέ, (δηλαδή την αυτεπαγωγή του πηνίου) ώστε το ρεύμα του ισοδύναμου κυκλώματος να φτάνει στα 45 mA μέσα σε χρόνο 1 ms από την ώρα που κλείνουν οι διακόπτες στα σημεία a και b. Θεωρούμε ότι το πηνίο δεν διαρρέεται από ρεύμα λίγο πριν κλείσουν οι διακόπτες.

Δίνονται:  $V_s = 5\text{ V}$ ,  $R_1 = 1\text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 500\ \Omega$ .

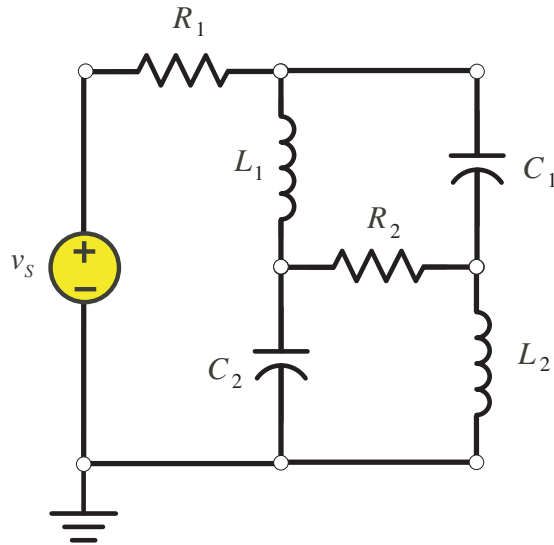


Σχήμα 2-2. Κύκλωμα της διάταξης.

# Γραμμικοί Γράφοι

## Άσκηση 3-1

Για το κύκλωμα του Σχ. 3-1 ζητούνται τα εξής:

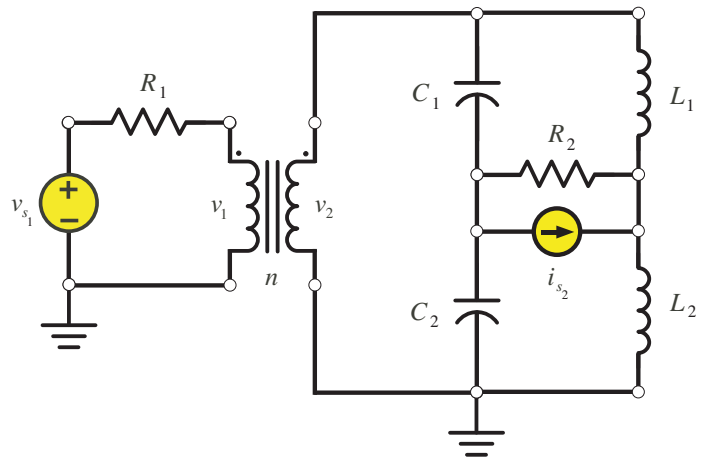


**Σχήμα 3-1.** Κύκλωμα με δύο πυκνωτές και δύο επαγωγείς.

- (α) Να κατασκευασθούν ο γράφος του κυκλώματος, το κανονικό δένδρο και οι δεσμοί.
- (β) Να ευρεθούν οι πρωτεύουσες και οι δευτερεύουσες μεταβλητές του κυκλώματος καθώς και η τάξη του συστήματος.
- (γ) Να γραφούν οι ανεξάρτητες εξισώσεις NTK και NTP καθώς και οι εξισώσεις των στοιχείων.
- (δ) Να καταστρωθούν οι εξισώσεις κατάστασης του κυκλώματος και να αποδοθούν σε μητρική μορφή.

## Άσκηση 2

Να καταστρωθούν οι εξισώσεις κατάστασης που αντιστοιχούν στο κύκλωμα του Σχ. 3-2, να αποδοθούν σε μητρική μορφή και να γραφεί η εξίσωση εξόδου σε μητρική μορφή για το ρεύμα του πρωτεύοντος πηνίου.



**Σχήμα 3-2.** Κύκλωμα με μετασχηματιστή, δύο πυκνωτές και δύο επαγωγείς.

# Απόκριση Κυκλωμάτων

## Άσκηση 4-1

Το RC κύκλωμα του Σχήματος 4-1 χρησιμοποιείται σε κύκλωμα συναγερμού. Ο συναγερμός ενεργοποιείται όταν η ένταση του ρεύματος που διαρρέει την αντίσταση  $R_3$  ξεπεράσει την τιμή  $100\mu\text{A}$ . Να υπολογιστούν:

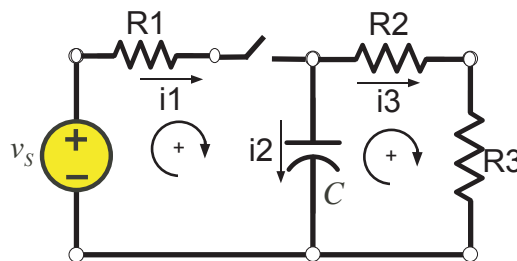
(α) Η χωρητικότητα  $C$  του πυκνωτή ώστε ο συναγερμός να ενεργοποιηθεί μετά από χρόνο  $t_1 = 50\text{ ms}$ , ύστερα από το κλείσιμο του διακόπτη ( $t = 0\text{ s}$ ).

(β) Ο χρόνος που απαιτείται για την πλήρη φόρτιση του πυκνωτή και η τιμή της τελικής του τάσης.

(γ) Το φορτίο του πυκνωτή την στιγμή που ενεργοποιείται ο συναγερμός. Χρησιμοποιήστε την τιμή της χωρητικότητας του πυκνωτή που υπολογίσατε στο (α) ερώτημα.

(δ) Να σχεδιαστούν οι αποκρίσεις  $i_3(t)$  και  $V_c(t)$ .

Δίνονται:  $V_s = 10\text{ Volt}$ ,  $R_1 = 10\text{ K}\Omega$ ,  $R_2 = 6\text{ K}\Omega$ ,  $R_3 = 4\text{ K}\Omega$ .



Σχήμα 4-1. Κύκλωμα RC για ενεργοποίηση συναγερμού.

## Άσκηση 4-2

Στο RLC κύκλωμα του Σχήματος 4-2 ο διακόπτης κλείνει την χρονική στιγμή  $t = 0$ . Ζητούνται:

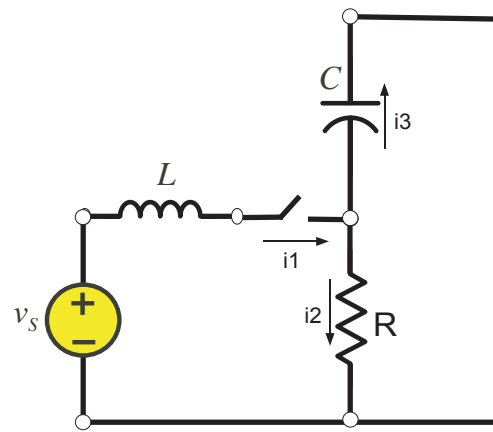
(α) Η διαφορική εξίσωση που διέπει την τάση του πυκνωτή.

(β) Το ρεύμα  $i_2$  που διαρρέει την αντίσταση  $R$  καθώς και το φορτίο του πυκνωτή, στην μόνιμη κατάσταση, όταν γνωρίζουμε ότι  $\zeta = 0,5$  και  $\omega_n = 5\text{ rad/sec}$ .

(γ) Σχεδιάστε προσεγγιστικά την  $V_c(t)$ . Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Δίνονται:  $V_s = 5\text{ Volt}$  και  $L = 4\text{ H}$ .



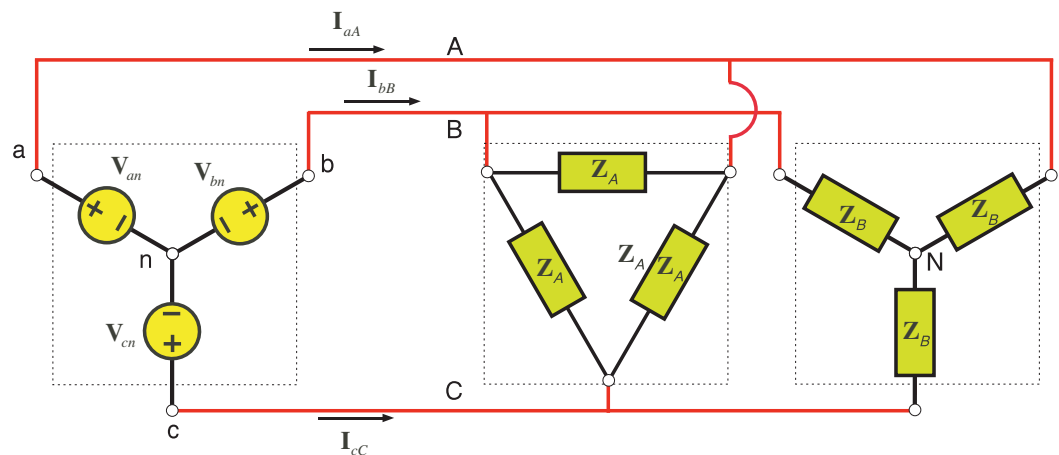


Σχήμα 4-2. Κύκλωμα RLC.

# 3Φ Δίκτυα

## Άσκηση 5-1

Καλείστε να επιλέξετε κατάλληλη γεννήτρια που θα τροφοδοτήσει δύο νέες μονάδες ενός εργοστασίου ανακύκλωσης. Μόλις λάβατε από τους υφιστάμενους σας την τελική μοντελοποίηση του τριφασικού φορτίου για κάθε μονάδα ξεχωριστά. Από κακό συντονισμό, η ομάδα που είχε αναλάβει την μονάδα A μοντελοποίησε το φορτίο σε μορφή τριγώνου με σύνθετη αντίσταση σε κάθε φάση ίση με  $100+j50 \Omega$ , ενώ η ομάδα που είχε αναλάβει την μονάδα B σε μορφή αστέρα με σύνθετη αντίσταση σε κάθε φάση ίση με  $120+j30 \Omega$ . Οι δύο μονάδες συνδέονται παράλληλα όπως φαίνεται στο Σχήμα 5-1.



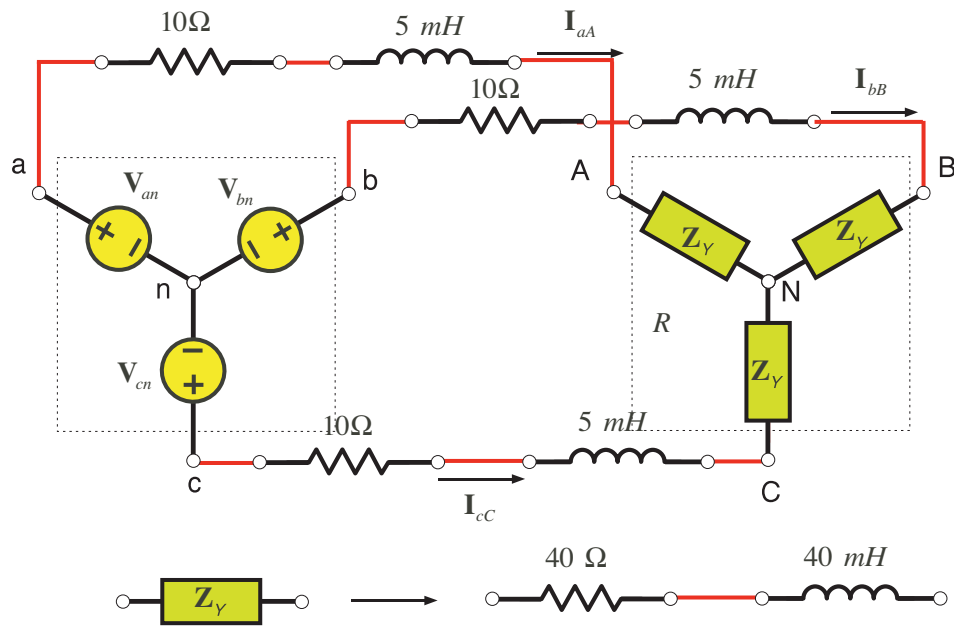
Σχήμα 5-1. 3Φ δίκτυο.

(α) Απλοποιήστε το σύστημα ώστε το τελικό μοντέλο να περιέχει μόνο ένα τριφασικό φορτίο σε μορφή αστέρα (Υπόδειξη: ξεκινήστε από το φορτίο της μονάδας B).

(β) Σας έχουν προταθεί 2 τριφασικές γεννήτριες. Η τάση φάσης και των δύο γεννητριών είναι  $V_{aa'} = 220 \angle 0^\circ$ ,  $V_{bb'} = 220 \angle 120^\circ$  και  $V_{cc'} = 220 \angle 240^\circ$ . Η πρώτη είναι ισχύος 2 kW, έχει σύνθετη αντίσταση ανά φάση ίση με  $10+j5 \Omega$ , και κοστίζει 150,000 €. Η δεύτερη είναι ισχύος 2.5 kW, με σύνθετη αντίσταση σε κάθε φάση ίση με  $15+j8 \Omega$ , και κοστίζει 180,000 €. Ποια θα επιλέγατε, δεδομένου ότι μελλοντικά υπάρχει η σκέψη επέκτασης της μονάδας B με μηχανήματα που θα χρειάζονται 500 W επιπλέον ισχύ (συνυπολογίζονται σε αυτή την ισχύ οι όποιες επιπλέον απώλειες). Υπάρχουν απώλειες από την αντίσταση της κάθε φάσης κατά την γραμμή μεταφοράς ίση με  $10+j2 \Omega$ . (Υπόδειξη: βρείτε το ρεύμα γραμμής και την τάση φάσης, και έτσι την ισχύ που καταναλώνει το τριφασικό δίκτυο).

## Άσκηση 5-2

Έχετε υπό την ευθύνη σας την ανάπτυξη του συστήματος τριφασικής τροφοδοσίας νέας βιομηχανικής μονάδας. Οι αρχικές εκτιμήσεις κάνουν λόγο για άμεση τροφοδοσία από τριφασική γεννήτρια (πηγή μορφής Y) στο συμμετρικό φορτίο (μορφής Y). Το μοντέλο του συστήματος φαίνεται στο Σχήμα 5-2. Η τάση ανά φάση εισόδου είναι 220 V στα  $n = 50$  Hz.



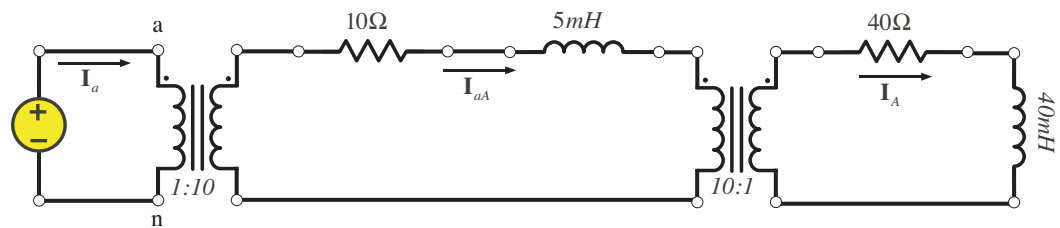
Σχήμα 5-2. 3Φ δίκτυο.

(α) Υπολογίστε τις συνολικές απώλειες της γραμμής μεταφοράς και δείξτε ότι αυτός ο τρόπος διασύνδεσης δεν είναι ο ενδεδειγμένος. Για να το κάνετε αυτό θα χρειαστεί να βρείτε το ποσοστό ισχύος που χάνεται στις γραμμές και το ποσοστό ισχύος που τελικά καταναλώνεται από τα μηχανήματα της μονάδας.

(β) Εξετάστε τη λύση της ύπαρξης δύο μετασχηματιστών, όπως στο Σχήμα 5-3. Οι μετασχηματιστές έχουν λόγο μετασχηματισμού 1:10 και θεωρούνται ιδανικοί. Ποια είναι τα ρεύματα που διαρρέουν τα κυκλώματα; Ποια είναι τώρα η απόδοση του συστήματος τροφοδοσίας;

Υπόδειξη 1.  $\omega = 2\pi\nu$ .

Υπόδειξη 2. Χρησιμοποιήστε το απλοποιημένο κύκλωμα μίας μόνο φάσης.

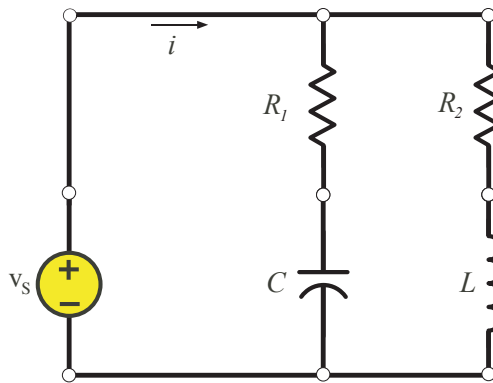


Σχήμα 5-3. Ανά φάση ισοδύναμο κύκλωμα με μετασχηματιστές.

# Απόκριση Συχνότητας

## Άσκηση 6-1

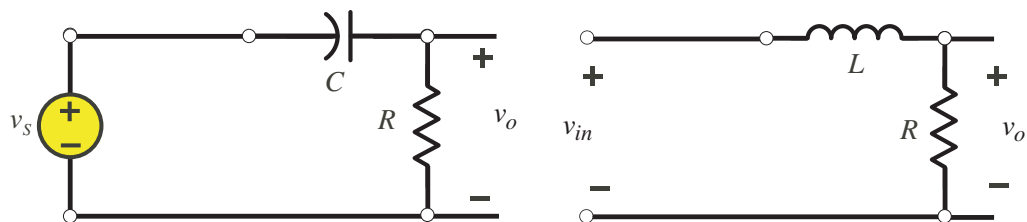
Μπορείτε να βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς  $V_s/i$  για το κύκλωμα στο Σχ. 6-1; Εάν το κέρδος της συνάρτησης μεταφοράς είναι 9.5 dB για συχνότητα DC, βρείτε την τιμή της αντίστασης  $R_2$  και σχεδιάστε το διάγραμμα Bode. Δίνονται  $R_1=5\Omega$ ,  $C=0.1F$ ,  $L=2H$ .



Σχήμα 6-1. Κύκλωμα άσκησης 6-1.

## Άσκηση 6-2

Στο φίλτρο του Σχ. 6-2(α), ποια θα πρέπει να είναι η χωρητικότητα του πυκνωτή  $C$  ώστε να αποκόπτει (φιλτράρει) συχνότητες κάτω από 150 Hz; Θέλουμε στη συνέχεια να αποκόπτονται συχνότητες μεγαλύτερες από 200 Hz. Για το σκοπό αυτό, προσθέτουμε το φίλτρο RL του Σχήματος 6-2(β) σε σειρά με το πρώτο φίλτρο. Ποια πρέπει να είναι η τιμή του  $L$  εάν χρησιμοποιηθεί η ίδια αντίσταση  $R$ ; Επαληθεύστε με το διάγραμμα Bode ότι βάζοντας τα δύο φίλτρα σε σειρά, το συνολικό κύκλωμα λειτουργεί κατά τον επιθυμητό τρόπο. Δίνεται  $R=100\Omega$ . (Θεωρείστε ότι βάζοντας τα δύο φίλτρα στη σειρά, η συνολική συνάρτηση μεταφοράς είναι το γινόμενο των δύο επιμέρους).



Σχήμα 6-2. Κύκλωμα RC άσκησης 2-2. (α) Αρχικό φίλτρο, (β) Φίλτρο που προστίθεται.